

Table des matières

I)	ENS MP-MPI	1
	1) Algèbre	1
	2) Analyse	10
	3) Géométrie	21
	4) Probabilités	22
II)	X	27
	1) Algèbre	27
	2) Analyse	35
	3) Géométrie	43
	4) Probabilités	43

I) ENS MP-MPIXENS

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS 2023 # 1] Soient S et T des ensembles finis non vides et $f: S \rightarrow T$. On pose $X = \{(x, y) \in S^2, f(x) = f(y)\}$. Montrer que $|X| \geq \max\left(\frac{|S|^2}{|T|}, \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil^2 + |S| - \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)$.

Démonstration. Pour le terme de gauche, il s'agit de montrer que $\sum_y n_y^2 \geq \frac{(\sum_y n_y)^2}{\sum_y 1}$, c'est Cauchy-Schwarz. Pour le terme de droite, c'est un principe des tiroirs, puis compter pour 1 les éléments qui ne sont pas dans le tiroir. □

Exercice 2 [ENS 2023 # 2] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et S un sous-ensemble non vide de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $|m - \sum_{i \in S} x_i| \leq \frac{1}{n+1}$.

Démonstration. S sera un sous-ensemble d'entiers consécutifs : considérer les sommes partielles $S_0, \dots, S_n$. □

Exercice 3 [ENS 2023 # 3] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E(n)$ la valuation 5-adique de $\prod_{k=1}^n k^k$. Donner un équivalent de $E(n)$, quand $n \rightarrow +\infty$. SUP

Démonstration. C'est $\sum_{q=1}^{\lfloor n/5 \rfloor} 5q + \sum_{q=1}^{\lfloor n/5^2 \rfloor} 25q + \dots$ □

Exercice 4 [ENS 2023 # 5] Soit p un entier premier > 1 . Montrer que -1 est un carré modulo p si et seulement si p est somme de deux carrés d'entiers.

Démonstration. Si p est somme de deux carrés d'entiers, $p \equiv 1[4]$, et a est un carré si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$. Réciproquement, si $p \mid m^2 + 1$. On peut trouver $0 < x, y < \sqrt{p}$ tels que $p \mid m^2 x^2 - y^2$. On obtient alors $p \mid x^2 + y^2$, donc $p = x^2 + y^2$. □

Exercice 5 [ENS 2023 # 6] 1. Soit p un nombre premier impair. Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ contient $(p-1)/2$ carrés.
2. Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ s'écrit comme la somme de deux carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Soit n un entier impair. Montrer que tout élément de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ s'écrit comme somme de deux carrés.

Indication : Commencer par le cas où n est sans facteur carré.

Exercice 6 [ENS 2023 # 7] Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Si p est un nombre premier et si $r \in \mathbb{Q}^*$ s'écrit $\frac{a}{b}$ de manière irréductible, on définit la p -valuation $v_p(r)$ comme $v_p(a) - v_p(b)$.

1. Montrer que si $p \geq 3$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 1$.
2. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 2$.
3. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{(p-1)p}) \geq 1$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $v_2(H_n)$.

Exercice 7 [ENS 2023 # 9] 1. Calculer $\sum_{d|n} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.
2. Calculer $\sum_{d|n} \mu(d)$ où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1, \mu(p) = -1, \mu(p^k) = 0$ pour $k \geq 2$ si p est un nombre premier et $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ si $n \wedge m = 1$. On pose $F: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left| \left\{ \frac{p}{q} \in [0, 1]; q \leq x \right\} \right|$.
3. Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x)$.

Démonstration. 1. $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$
2. $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$, ou 1 pour $n = 1$.
3. Par inversion de Möbius, on a $\varphi(d) = \sum_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) d'$. □

Exercice 8 [ENS 2023 # 10] Soient p, q deux nombres premiers distincts. On note $v_p(n)$ la valuation p -adique d'un entier n . On pose, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $N(m) = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^m)$. Trouver une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $v_p(N(m)) \leq cm \ln(m)$.

Démonstration. Relier à 423 (LTE).

On a $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$ (pour $p \neq 2$).

Donc $v_p(N(m)) = \sum_{k=1}^m v_p(1 - q) + v_p(m!)$, plus formule de Legendre. □

Exercice 9 [ENS 2023 # 11] Si X est un ensemble fini, on note $X^* = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^k$, $c: (X^*)^2 \rightarrow X^*$ la concaténation et $\ell: X^* \rightarrow \mathbb{N}$ la longueur. Soient A et B deux ensembles finis et $\varphi: A^* \rightarrow B^*$ telle que, pour tous $a, a' \in A$, $\varphi(c(a, a')) = c(\varphi(a), \varphi(a'))$. SUP

- On pose $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{0, 1\}$. Étudier l'injectivité des applications définies sur les lettres de A puis étendues sur A^* par $\varphi: A \rightarrow B^*$ telles que $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 01, \varphi(c) = 10, \varphi(d) = 10011$, et $\psi: A \rightarrow B^*$ telle que $\psi(a) = 01, \psi(b) = 10, \psi(c) = 11, \psi(d) = 00$.
- Montrer que, si φ est injective, alors $\sum_{a \in A} |B|^{-\ell(\varphi(a))} \leq 1$.

Démonstration. 1. La première est non injective : 0100110 peut être lu de deux façons.

La seconde l'est.

- On note C_N le nombre de choix possibles, de mots, dont la longueur totale N .

On doit avoir $C_N \leq |B|^N$. Mais C_N vérifie une relation de récurrence : $C_N = \sum_{a \in A} C_{N-\ell(a)}$.

Donc les racines de cette récurrence doivent être $\leq |B|$, ce qui implique qu'en $|B|$ la valeur est négative, d'où le résultat. □

Exercice 10 [ENS 2023 # 12] 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition (12) et le cycle $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

- La transposition (13) et le cycle (1234) engendrent-ils $\mathcal{S}_4$?
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq a < b \leq n$ tels que $\tau = (ab)$ et $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ n)$ engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que $b - a$ et n sont premiers entre eux.
- Montrer la réciproque de la propriété précédente. SUP

Démonstration. 1.

2. Non.

3. Si $p \mid b - a \wedge n$, alors $\sigma(a) - \sigma(b) \equiv a - b[p]$.

4. Facile de se ramener à un cycle $(uu + 1)$ □

Exercice 11 [ENS 2023 # 14] Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G , on pose $X^{-1} = \{x^{-1}, x \in X\}$ et $XY = \{xy, (x, y) \in X \times Y\}$. SUP

Dans la suite, X désigne une partie non vide de G .

- On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
- On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G .

Démonstration. 1. Si X a un seul élément, ok. Sinon, alors pour tous $a, b \in X$, les ensembles aX et bX ne sont pas disjoints, donc il existe u, v tels que $au = bv \Leftrightarrow a^{-1}b = uv^{-1}$. D'où le résultat.

- Indépendant de la question précédente. À relier à un théorème de Freiman.

Il suffit de montrer que $X^{-1}X$ est stable par produit. Soit $a, b \in X^{-1}X$, $a = x^{-1}y$ et $b = u^{-1}v$, $ab = x^{-1}yu^{-1}v$.

L'hypothèse sur le cardinal de XX^{-1} implique que a peut s'écrire de $> \frac{|X|}{2}$ façons différentes comme $a = x^{-1}y$. De même pour b , donc deux de ces façons on l'élément au milieu en commun : $y = u^{-1}$, et alors $ab = x^{-1}v$. □

Exercice 12 [ENS 2023 # 15] Soient A un anneau et $B \subset A$ finie non vide. On note $E(B) = |\{(a, b, c, d) \in B^4 \mid ab = cd\}|$. Montrer que $E(B) \geq \frac{|B|^4}{|BB|}$. SUP

Démonstration. On note x_i le nombre de couples qui donnent une valeur $i \in A$. Alors $E(B) = \sum x_i^2$, et $|BB| = \sum_i 1$. Cauchy-Schwarz permet de minorer par $(\sum x_i)^2$, d'où le résultat. □

Exercice 13 [ENS 2023 # 16] 1. Montrer que $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$.

- Soit $m \geq 2$. Montrer que le morphisme $\pi: SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif. SUP

Démonstration. 1. Division euclidienne.

2. Clair. □

Exercice 14 [ENS 2023 # 17] Soit p un nombre premier. On admet qu'il existe un anneau commutatif A dans lequel $p^2 \cdot 1_A = 0_A$ et il existe un élément inversible x tel que :

- tout élément de A s'écrit $P(x)x^{-k}$ pour un $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un $k \in \mathbb{N}$;
- pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X]$ et deux entiers naturels k, ℓ , l'égalité $P(x)x^{-k} = Q(x)x^{-\ell}$ équivaut à ce que $X^k Q$ et $X^\ell P$ aient même réduit modulo p^2 (autrement dit, tous les coefficients de $X^k Q - X^\ell P$ sont des multiples de p^2).

- Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Caractériser l'inversibilité de $P(x)x^{-k}$ dans A .

2. Montrer que le groupe multiplicatif $A^\times$ ne possède pas de partie génératrice finie.

Démonstration. 1. $P(x)x^{-k}$ est inversible si et seulement si $P(x)$ l'est, on peut alors supposer que le coefficient constants de P est non nul.

S'il est inversible, alors le coefficient constant est premier avec p .

S'il est inversible, il est inversible modulo p , donc ses autres coefficients sont 0 modulo p .

Réciproquement, on prend un polynôme $P = b + pP'$, admet $b - pP'$ comme inverse essentiellement.

2. Quand on multiplie des éléments, on somme les polynômes, donc le degré est inférieur au max des deux. □

Exercice 15 [ENS 2023 # 18] Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $S_q = \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a f(n)}{q}}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $q \wedge q' = 1$, alors

$$S_{qq'} = S_q S_{q'}.$$

Démonstration. Les $a \in \llbracket 1, qq' \rrbracket$ premiers avec q et q' sont les $bq + aq'$, avec a premier avec q et b premier avec q' . □

Exercice 16 [ENS 2023 # 19] On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ est intégrable si : $\forall (x, y) \in X^2, |x - y| \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble intégrable X composé de n points tous sur un même cercle. SUP

Démonstration. On veut que les $\sin(\frac{\theta_i - \theta_j}{2})$ soient rationnels, c'est-à-dire les $\sin \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{\theta_j}{2} - \sin \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_i}{2}$.

Il suffit donc de prendre les doubles d'une infinité de points rationnels sur le cercle.

Autre possibilités : prendre des points entiers sur un cercles, donc tels que $x^2 + y^2 = n$. Il suffit que n s'écrive de plein de façons comme sommes de deux carrés. □

Exercice 17 [ENS 2023 # 20] ANNEAU DES ENTIERS ALGÈBRIQUES Soit $z \in \mathbb{C}$ annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $Q(z)$ est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. SUP

Démonstration. On note P le polynôme unitaire qui annule z (polynôme minimal, via lemme de Gauss).

En passant par la matrice compagnon, on sait que z est valeur propre d'une matrice à coefficients entiers, donc $Q(z)$ aussi. □

Exercice 18 [ENS 2023 # 21] Soit $n = 2m + 1 \geq 1$ un entier impair. Expliciter un polynôme P_m de degré $2m$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sin(nx) = (\sin x)^n P_m(\cotan x)$.

1. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^m \cotan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

2. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

3. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration. Easy. □

Exercice 19 [ENS 2023 # 22] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. SUP

1. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

2. Montrer que si n est impair, alors P_n possède exactement une racine réelle, et qu'elle appartient à $[-n, -1]$.

3. On suppose n pair. Le polynôme P_n a-t-il une racine réelle ?

4. Déterminer les variations et la convexité de $x \mapsto P_n(x)$.

Démonstration. 1.

2. Encadrement des racines : la somme est alternée.

On procède par récurrence, et on a $P_n = P'_n + \frac{x^n}{n!}$, cette quantité étant négative.

3. Non : vérifier le signe en la racine de la dérivée. □

Exercice 20 [ENS 2023 # 23] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, nP(x)P''(x) \leq (n-1)P'(x)^2$.

2. Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

Démonstration. 1.

2. Ajouter à un précédent. □

Exercice 21 [ENS 2023 # 24] Soit $n \in \mathbb{N}^*, P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On factorise P sous la forme $P = \prod_{i=1}^n (X - z_i)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k = \sum_{i=1}^n z_i^k$. Montrer que, si $k > n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \dots + a_0S_{k-n} = 0$ et que, si $k \leq n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \dots + a_{n-k+1}S_1 = -ka_{n-k}$. SUP

Exercice 22 [ENS 2023 # 25] Une suite d'entiers $(a_n)_{n \geq 1}$ est un pseudo-polynôme si pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*, m - n \mid a_m - a_n$. SUP

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $(P(n))_{n \geq 1}$ est un pseudo-polynôme.

2. Montrer que $(\lfloor n!e \rfloor)_{n \geq 1}$ est un pseudo-polynôme.

3. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et que la suite $(P(n))_{n \geq 1}$ ne soit pas un pseudo-polynôme.

Démonstration. 1.

2.

3. $\frac{n(n+1)}{2}$

□

Exercice 23 [ENS 2023 # 26] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Easy, à relier. Je ne trouve plus l'exercice... Cf le 4737, m'enfi

□

Exercice 24 [ENS 2023 # 27] Deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont entrelacées si

- $-P$ et Q sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$,
- P et Q n'ont aucune racine réelle commune,
- entre deux racines consécutives de P (respectivement Q) il y a une unique racine de Q (respectivement P).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P et Q sont entrelacés.

Exercice 25 [ENS 2023 # 28] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. On note D_r le disque complexe ouvert de centre 0 et de rayon r . Montrer que $D_{1/n} \subset P(D_1)$.

SUP

Démonstration. $X + X^2 Q(X) - z_i = 0$ avec $|z_i| < \frac{1}{n}$ admet toujours une racine, < 1 .

Vient des relations coefficients-racines.

□

Exercice 26 [ENS 2023 # 29] Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\mathcal{C}_P = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid P \circ Q = Q \circ P\}$.

SUP

On appelle suite commutante toute famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n, \deg P_n = n$ et $\forall n, m \in \mathbb{N}, P_n \circ P_m = P_m \circ P_n$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{C}(X^2 + \alpha)$ contient au plus un polynôme.
2. Expliciter une famille commutante telle que $P_2 = X^2$.
3. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(nx) = T_n(\cosh x)$.
4. Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite commutante.
5. Montrer que les polynômes de degré 1 sont inversibles pour $\circ$.
6. Montrer que, pour P de degré 2, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 unitaire tel que $P = U \circ (X^2 + \alpha) \circ U^{-1}$.
7. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille commutante. Montrer que, ou bien il existe U de degré 1 tel que $P_n = U \circ X^n \circ U^{-1}$, ou bien il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $P_n = U \circ T_n \circ U^{-1}$.

Exercice 27 [ENS 2023 # 31] • CNS sur n pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.

- On suppose cette condition satisfaite. Combien y a-t-il de polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ fixé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Soit p premier. Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles de degré 2 et 3 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Démonstration.

-
- Compter les multiples.

□

Exercice 28 [ENS 2023 # 32] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps, et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang ≤ 1 . Montrer que V est de dimension $\leq n$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 29 [ENS 2023 # 33] Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(X, Y) \in V^2$, on ait $\text{Tr}(XY) = 0$.

Démonstration. On a $X \perp X^T$, donc la dimension de X est $\leq \frac{n^2}{2}$.

Réciproquement. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on prend une diagonale, où le second coefficient est $i \times$ le premier etc.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ia \end{pmatrix}$. On cherche une forme réelle : $ia = \bar{a}$ donne $u + \frac{\pi}{2} = -u$, c'est-à-dire $u = -\frac{\pi}{4}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et idk, il faudrait écrire les équations pour l'autre matrice.

□

Exercice 30 [ENS 2023 # 35] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang telles que $A^2 B = A$. Montrer que $B^2 A = B$.

SUP

Démonstration. En passant à la transposée, on veut montrer que $(B' A' - I_n) A' = O_n \Rightarrow (A' B' - I_n) B' = O_n$.

Mais la première relation donne que si $X \in \text{Im } A'$, alors $B' A' X = X$. Donc $\text{Im } B' = \text{Im } A'$, et leurs induits sont inverses l'un de l'autre.

□

Exercice 31 [ENS 2023 # 38] Soient $n \geq 1$ et E une partie de $\mathcal{P}([1, n])$.

SUP

1. On suppose que E est stable par différence symétrique. Que dire de $C = \{1_A\}$ comme partie de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$?
2. On ne fait plus l'hypothèse précédente, mais on suppose que $A \cap B$ est de cardinal pair pour tous $A, B \in E$. Montrer que $|E| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Démonstration. 1. C'est un sous-espace vectoriel.

2. D'une part les cardinaux des éléments sont pairs. D'autre part les cardinaux des réunions aussi.

On vérifie que si $A, B, C \in E$, alors $(A \Delta B) \cap C$ est pair. Donc on peut supposer que E est stable par Δ .

Chaque $A \in E$ donne un élément du dual $\tilde{A} : B \mapsto A \cap B$, ce qui limite la dimension de E .

□

Exercice 32 [ENS 2023 # 39] Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $|a_i| \geq 2$, pour tout $i \in [1, n]$.

SUP

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, a_{ii} = a_i, a_{ij} = 1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Montrer que A est inversible et que son déterminant a le même signe que $\prod a_k$.
2. Montrer que la conclusion tient encore si l'on suppose $|a_{ij}| \leq 1$ si $|i - j| = 1$ au lieu de $a_{ij} = 1$.

Démonstration. 1. A est inversible car diagonale dominante.

Le signe du déterminant s'obtient en augmentant les coefficients, ou plutôt en diminuant les autres.

Par récurrence ? On a $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ On montre que $|\Delta_n| > |\Delta_{n-1}|$ + le signe, ça passe par récurrence.

2. ... C'est clair. □

Exercice 33 [ENS 2023 # 40] On considère $\varphi: (\mathbb{R}^4)^2 \rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u, v) associe la matrice dont le coefficient en (i, j) vaut

$$\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}.$$

1. Que peut-on dire si $\varphi(u, v) = \varphi(u', v') \neq 0_4$?
2. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que A s'écrit comme $\varphi(u, v)$ avec (u, v) libre si et seulement si $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
4. Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

Démonstration. 1. On a $\varphi(u, v) = \varphi(u, v + u)$. D'autre part, si $\varphi(u, v) \neq 0_4$, alors u, v ne sont pas colinéaires.

Par ailleurs, si $w \in \text{Vect}(u, v)$, on a $\forall i_1, i_2, i_3$, le déterminant 3×3 avec leurs coordonnées est nul, donc il va de même (développement sur la colonne de w) de celui avec u', v' , donc pour tout w' , le déterminant 4×4 , $\det(u', v', w, w')$ est nul (développement sur la dernière colonne), donc $w \in \text{Vect}(u', v')$.

Enfin, il faut que les triangles $(0, u, v)$ et $(0, u', v')$ aient la même aire, car φ est une forme bilinéaire alternée dans $\text{Vect}(u, v)$.

2. Réciproquement, la seule difficulté est de montrer que φ est non nulle, pour (u, v) libre. Mais si elle était nulle, pour tout w, w' , $\det(u', v', w, w')$ serait nul.
3. $\Rightarrow$: On peut vérifier que transformer u, v en Pu, Pv transforme A en PAP^T , on est donc ramené aux cas où $u = (1, 0, 0, 0)$ et $v = (0, 1, 0, 0)$.
 $\Leftarrow$: Réduction d'une matrice antisymétrique ? Prendre x, Ax (ils sont orthogonaux), puis une BON du reste, alors dans cette base A doit être antisymétrique, et le premier ? Plutôt, partir du noyau, qui est de dimension 2 et stable, et prendre un orthogonal du noyau.
4. Le noyau est $\text{Vect}(u, v)^\perp$, l'image est $\text{Vect}(u, v)$, car les deux sont orthogonaux. □

Exercice 34 [ENS 2023 # 41] Soient a, b, m, p des entiers naturels tels que $a^2 + b^2 - pm = -1$. On pose $A = \begin{pmatrix} p & a + ib \\ a - ib & m \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $B \in \text{GL}_2(\mathbb{Q}(i))$ telle que $A = B^* B$ où $B^* = \bar{B}^T$. Même question avec B dans $\text{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Démonstration. On a une matrice hermitienne, de déterminant 1.

Les équations donnent : on cherche quatre complexes u, v, w, z tels que $u\bar{v} + w\bar{z} = a + ib$ et $p = |u|^2 + |w|^2$ et $m = |v|^2 + |z|^2$. On peut remplacer la dernière équation par $uz - vw = 1$, ou $|uz - vw| = 1$.

Dans $\mathbb{Q}[i]$, on peut résoudre $u\bar{v} + w\bar{z} = a + ib$ et $uz - vw = 1$, quels que soient $u, w \in \mathbb{Q}[i]$, puis en multipliant par la racine de $\frac{|u|^2 + |w|^2}{p}$, on vérifie l'équation $p = \dots$ Mais on a un élément de $\sqrt{D}\mathbb{Q}[i]$. On peut le multiplier par un élément de $\mathbb{U}$, donc il faudrait un élément de $\sqrt{D}\mathbb{Q}[i] \cap \mathbb{U}$, c'est-à-dire montrer que D est une somme de quatre carrés (de rationnels).

Plutôt, on part de A , et on applique BAB^* , pour $B \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$. On obtient une matrice hermitienne à coefficients dans $\mathbb{Z}[i]$. En particulier les coefficients diagonaux sont entiers, et on vérifie que le coefficient en haut à gauche est non nul, positif, on le choisit minimal. Puis en appliquant $B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, en travaillant dur, on obtient que le coefficient doit être 1. On peut alors aussi obtenir 1 en bas à droite... □

Exercice 35 [ENS 2023 # 42] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^2$. Pour $g \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $f_g: (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mapsto \varphi_1(g(x_1)) \times \dots \times \varphi_n(g(x_n))$, application de $(\mathbb{R}^2)^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- il existe une suite $(g_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{g_k}(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$,
- il existe une droite vectorielle L telle que $|\{i \mid L \subset \text{Ker}(\varphi_i)\}| > \frac{n}{2}$.

Démonstration. Si il existe une droite L , en prenant $g_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ selon L et n'importe quel supplémentaire, ça devrait être bon.

Réciproquement, par décomposition polaire, on peut écrire $g_k = O_k D_k O'_k$, et supposer que $O_k \rightarrow O_\infty$ et $O'_k \rightarrow O'_\infty$, et $D_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k^{-1} \end{pmatrix}$, avec $\lambda_k \geq 1$.

On prend alors $e_L = O_\infty e_1$. En effet, pour $x = O_\infty^{-1}(e_1 + y)$, on a $g_k x = O_k((\lambda_k + o_{+\infty}(\lambda_k))e_1 + (\lambda_k^{-1} + o_{+\infty}(\lambda_k^{-1}))e_2)$, donc, pour que ça tende vers 0, il faut que $\varphi(O_k e_1) \rightarrow 0$, au moins un.

En fait, les m facteurs pour lesquels $\varphi(O_\infty e_1) \neq 0$ contribuent (en termes d'équivalent) λ_k^m .

Lemme : Si g_k est une suite, et φ est fixée, il existe une extraction, et un vecteur x tel que $\varphi(g_k(x))$ soit au moins de l'ordre de λ_k^{-1} . Démonstration : Sinon, c'est que $\varphi(g_k(x)) = o(\lambda_k^{-1})$, pour tout x . Prendre une BON (e_1, e_2) avec e_1 dans le noyau de φ . Les coordonnées de g_k sont de taille au plus λ_k donc l'un de $g_k(e_1), g_k(e_2)$ doit avoir une coordonnée en bas pas trop petite.

On applique ça aux éléments qui ont L dans leur noyau, et e_L pour les autres. □

Exercice 36 [ENS 2023 # 43] Soit G l'ensemble des matrices de $GL_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $ad-bc = 1$ et $a \equiv d \equiv 1-c \equiv 1[3]$.

Montrer que G est le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration. D'une part il contient le groupe engendré.

D'autre part, on peut faire des opérations, pour annuler b . □

Exercice 37 [ENS 2023 # 45] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C_A: X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XA$. Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors C_A l'est aussi.

Démonstration. Calculer les puissances de C_A . □

Exercice 38 [ENS 2023 # 46] Soient A et B deux matrices de $GL_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec A et B . Montrer que $BA = \pm AB$.

Démonstration. $\Leftarrow$ Ok.

$\Rightarrow$: On discute selon la dimension du commutant de $ABA^{-1}B^{-1}$.

- Si le commutant est de dimension 4, c'est que $AB = \lambda BA$, c'est bon, par déterminant.
- Par réduction dans $GL_2(\mathbb{C})$, le commutant ne peut pas être de dimension 3.
- Si le commutant est de dim 2, c'est $\text{Vect}(I_n, C)$, donc $B = \lambda A + \mu I_n$, donc A et B commutent. □

Exercice 39 [ENS 2023 # 47] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ leurs multiplicités. On note $P_k = (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $F_k = \text{Ker } P_k(A)$.

1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.
2. Montrer que P_k est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur F_k .
3. Montrer que A se décompose en $D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente et $ND = DN$.

Démonstration. Easy. □

Exercice 40 [ENS 2023 # 48] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et m la multiplicité de 0 dans χ_A . On suppose que $m \geq 1$. Montrer l'équivalence entre

- $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$.
- il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^m = A$.
- pour tout $k \geq 1$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^k = A$.

Démonstration. • (iii) $\Rightarrow$ (ii)

- (iii) $\Rightarrow$ (i) est simple, via les noyaux itérés.
- (i) $\Rightarrow$ (iii) : Décomposition des noyaux, on est ramené au cas où A inversible, puis réduction, au cas où A est $\lambda I_n + N$, puis méthode de DL. □

Exercice 41 [ENS 2023 # 49] Soit $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres sont de module ≤ 1 . Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $M^k - I_n$ soit nilpotente.

Démonstration. Il s'agit exactement de montrer que les valeurs propres de M sont des racines de l'unité.

Les $\text{Tr } M^k$ prennent un nombre fini de valeurs, et par co-approximations, on peut tendre vers 1, donc c'est gagné. □

Exercice 42 [ENS 2023 # 51] Soit $n \geq 1$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{i,j}$ la matrice de permutation associée. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\forall A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}), f(PAP^{-1}) = f(A)$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f: \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(P_\sigma D P_\sigma^{-1}) = f(D)$. Expliciter un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.

Démonstration. $\mathcal{B}$ est l'ensemble des polynômes symétriques. On a une application $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Elle est injective : si l'on coïncide sur les matrices diagonales, on coïncide sur les diagonalisables, donc par densité, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Elle est surjective : Si f est donné sur les $\mathcal{D}_n$, on montre que f est entièrement déterminée par $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Par ailleurs, f est polynomiale en les σ_i (il faut travailler...).

Puis on peut définir f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en prenant l'image des coefficients du polynôme caractéristique. □

Exercice 43 DÉCOMPOSITION DE JORDAN [ENS 2023 # 52] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m , $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $(f^k(x))_{0 \leq k \leq m-1}$ est libre. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille.
2. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(f^{m-1}(x)) \neq 0$, W le sous-espace de E^* engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0 \leq i \leq m-1}$, $W^\perp$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^\perp, \psi(y) = 0$. Montrer que $W^\perp$ est un supplémentaire de V dans E stable par f .
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme J_k avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

Démonstration.

□

Exercice 44 [ENS 2023 # 53] Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \geq 1$. Un élément $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de E .

1. Quels sont les endomorphismes de E diagonalisables et cycliques ?
2. Montrer que si u est cyclique, le commutant de u est égale à $\mathbb{K}[u]$.
3. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ de E stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et que, pour tout i , u_{E_i} soit cyclique.

Démonstration. 1. Vps distinctes.

2. Assez simple.

3. On est ramené à une matrice nilpotente, auquel cas c'est Jordan : tu prend un x avec $f^{m-1}(x) \neq 0$, l'espace engendré. La difficulté est de trouver un supplémentaire stable, en fixant une forme linéaire non nulle sur $f^{(m-1)}(x)$, et considérant $(\varphi \circ f^i)$.

□

Exercice 45 [ENS 2023 # 54] Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $d_1, \dots, d_r$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_r$. Déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $GL_n(\mathbb{C})$ contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$.

Démonstration. $n = r$ convient. Réciproquement, si G contient un tel groupe, on peut codiagonaliser.

□

Exercice 46 [ENS 2023 # 55] Le groupe $GL_2(\mathbb{Q})$ contient-il un élément d'ordre 5 ?

Démonstration. Montrer qu'une racine 5-ème de l'unité n'a pas de polynôme annulateur sur $\mathbb{Q}$ de degré 2, c'est-à-dire que $1 + \dots + X^4$ est irréductible.

□

Exercice 47 [ENS 2023 # 56] On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle.

1. Montrer que $\forall M \in H, e^M \in SL_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall M \in H, \text{Tr } e^M \geq -2$.
3. A-t-on $\exp(H) = SL_2(\mathbb{R})$?
4. Montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit d'une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$ et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 .
5. En déduire que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit de deux exponentielles de matrices de H .

Démonstration. 1.

2. C'est $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

3. Non, cf question précédente.

4. Partir d'une matrice de SL_2 , et faire le produit.

5. Antisymétrique + triangulaire.

□

Exercice 48 [ENS 2023 # 57] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, h_1 et h_2 deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une norme sur E pour laquelle h_1 et h_2 sont des isométries et que $[h_1, h_2] = h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ commute avec h_1 et h_2 . Montrer que l'espace F des vecteurs de E fixes par h_1 et h_2 admet un supplémentaire dans E stable par h_1 et h_2 .

Démonstration. Pour la norme euclidienne.

- Si $h_1 = h_2$: On prend $F^\perp$.
- Si h_1 et h_2 commutent. On a $F = F_1 \cap F_2$, $F^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$, mais $F_1^\perp$ est stable par h_1 , et par h_2 , car h_2 commute avec h_1 , donc stabilise F_1 .
- L'ensemble F_{com} des points fixes de $[h_1, h_2]$ contient F_0 , et son orthogonal est stable par h_1 et h_2 . Par ailleurs, dans F_{com} , h_1 et h_2 commutent.

Pour une autre norme.

- Si $h_1 = h_2$, on prend $(\sum_{k=0}^n h^k)(I_n - h) = I_n - h^{n+1}$ est bornée, donc $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n h^k$ vaut Id sur les points fixes, et tend vers 0 sur $\text{Im}(I_n - h)$. Alors $\text{Im}(I_n - h)$ est stable, et supplémentaire.
Rmq : Cet espace est l'ensemble des éléments tels que $(\sum_{k=0}^n h^k)(x)$ soit bornée.
- Si h_1 et h_2 commutent, $F = F_1 \cap F_2$, on considère $G = \text{Im}(I_n - h_1) + \text{Im}(I_n - h_2)$. G est stable par commutativité. G est en somme directe avec F : si $x \in G \cap F$, $x = x_1 + x_2$, alors en appliquant h_1 , $\sum_{k,\ell} h_1^k h_2^\ell(x) \sim n^2$, mais $\sum h_1^k h_2^\ell(x_1) = O(n)$, idem pour l'autre.
- Même chose que le précédent.

□

Exercice 49 [ENS 2023 # 58] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que $\sum |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.
2. Montrer que $|\det A| \leq n^{n/2} \sup |a_{ij}|$.

Démonstration. 1. C'est l'inégalité de Schur, dont la seule preuve que je trouve repose sur la décomposition de Schur : A est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure : on choisit un vecteur propre, puis on recommence dans l'orthogonal... Indication : commencer par le cas symétrique.

2. IAG.

□

Exercice 50 [ENS 2023 # 59] Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$, $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$. On note p le projecteur orthogonal de E sur $\text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$. Montrer que $\forall x \in E$, $\sum_{i=1}^m \langle u_i, x \rangle \langle x, p(v_i) \rangle = \|p(x)\|^2$.

Démonstration. Easy, on a $\langle x, p(v_i) \rangle = \langle p(x), v_i \rangle = \langle u_i, x \rangle$. □

Exercice 51 [ENS 2023 # 60] On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$. On pose $F = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$ et on note Q la projection orthogonale de 1 sur F .

On écrit $Q = -\sum_{k=1}^n a_k X^k$ et $P = 1 + \sum_{k=1}^n a_k (X+1) \dots (X+k)$.

- Déterminer $\langle Q-1, X^k \rangle$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et montrer que $P(k) = 0$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Calculer $\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 e^{-x} dx$.

Démonstration. 1. Cela vaut 0. $P(k) = 0$ découle des relations intégrales. Donc $P(X) = a_n(X-1) \dots (X-n)$.

Par ailleurs $P(-1) = 1$, donc $a_n(-1)^n(n+1)! = 1$

2. Cela vaut $\langle 1-Q, 1-Q \rangle = \langle 1-Q, 1 \rangle = \int (1 + \sum a_i x^i) e^{-x} dx = 1 + \sum a_i i! = P(0)$.

Par ailleurs, $P(X) = a_n(X-1) \dots (X-n)$, donc $P(0) = a_n n! = \frac{1}{n+1}$. □

Exercice 52 [ENS 2023 # 61] LEMME DE FARKAS Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$ et $u, u_1, \dots, u_m$ des vecteurs de E . Montrer que $u \in \mathbb{R}^+ u_1 + \dots + \mathbb{R}^+ u_m$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\{x \in E \mid \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \langle u_i, x \rangle \leq 0\} \subset \{x \in E \mid \langle u, x \rangle \leq 0\}$.

Démonstration. • $\Rightarrow$: Easy.

- $\Leftarrow$: Si les vecteurs u_i sont libres, on peut prendre un élément x orthogonal à tous sauf 1, qui implique que la coordonnée de u en u_i est bien positive.

Si u n'est pas dans le cône convexe, alors il existe un hyperplan qui le sépare du cône, et on peut alors construire un vecteur x qui a un produit scalaire ≤ 0 avec tous les u_i , mais un produit scalaire < 0 avec u . □

Exercice 53 [ENS 2023 # 62] Montrer que, si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, M s'écrit d'une unique façon QR avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Démonstration. C'est GS. □

Exercice 54 [ENS 2023 # 63] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et inversible.

- Que peut-on dire de l'entier n ?
- En considérant M^2 , montrer que M admet un plan stable puis qu'il existe une matrice orthogonale $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $O^T M O$ soit une matrice diagonale par blocs de la forme $\text{diag}(R_{a_1}, \dots, R_{a_k})$, avec $R_a = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
- Qu'en est-il si M n'est plus supposée inversible?

Démonstration. 1. pair.

2. M^2 est symétrique donc diagonalisable. Alors si X est valeur propre, X, MX est stable.

3. On rajoute le noyau. □

Exercice 55 [ENS 2023 # 64] Soit $n \geq 1$. Déterminer les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^k = A^T$ pour tout entier $k \geq n$.

Démonstration. On a A et A^T cotrigonalisable, donc $\lambda \mapsto \lambda + \lambda^k$ est une bijection sur les valeurs propres. La seule possibilité est que A soit nilpotente, donc symétrique. □

Exercice 56 [ENS 2023 # 65] Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de réflexion dans $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose $A' = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer $\chi_{A'}(1)$ en fonction de la première colonne de M et de χ_A .

Démonstration. $\chi_{A'}(1) = \det(I_{n+1} - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}) = \det M \det \left(M - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right)$.

Il se trouve que, pour tout i , $e_i - M e_i$ est dans la droite orthogonale à l'hyperplan. Autrement dit, $M - I_{n+1}$ est de rang 1, et si $C_1 \neq e_1$, $M = (e_i + \lambda_i(C_1 - e_1))$, on peut annuler les termes avec le premier. □

Exercice 57 [ENS 2023 # 66] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On suppose que A et $A + vv^T$ n'ont pas de valeur propre commune. Sous réserve d'existence, on pose $F(x) = 1 + v^T(A - xI_n)^{-1}v$ pour x réel.

- Montrer que les zéros de F sont les valeurs propres de $A + vv^T$.
- On note $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ les valeurs propres de A . Montrer que chaque intervalle $] \lambda_i, \lambda_{i+1} [$ et $] \lambda_n, +\infty [$ contient exactement une valeur propre de $A + vv^T$.

Démonstration. • Si $(A + vv^T)X = \lambda X$, alors $AX + v\langle v, X \rangle = \lambda X$, donc $(A - \lambda I_n)X = -v\langle v, X \rangle$, ce qui implique $\langle v, (A - \lambda I_n)^{-1}v \rangle = -1$. Réciproquement, on voit qu'il faut poser $X = (A - \lambda I_n)^{-1}v$ □

Exercice 58 [ENS 2023 # 67] Soient $n \in \mathbb{N}$ impair, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $A + M$ soit non inversible. Montrer que $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Par récurrence. On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A' \end{pmatrix}$, avec h petit et A' fixé. Le terme en h^2 est $h^2 \det(M' + A')$. □

Exercice 59 [ENS 2023 # 68] Soient A, B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'ont pas -1 pour valeur propre et telles que AB n'ait pas 1 pour valeur propre. Montrer que $(A - I_n)(BA - I_n)^{-1}(B - I_n)$ est antisymétrique.

Démonstration. • Ou bien, par analyse synthèse, montrer que si $A \in \mathcal{O}_n$, n'a pas -1 comme valeur propre, alors il existe un unique H antisymétrique tel que $A = (I_n - H)(I_n + H)^{-1}$.

- On peut aussi l'obtenir directement, en écrivant $(BA - I_n)^{-1} = A^{-1}(B - A^{-1})^{-1}$ et en écrivant $1 - y = (1 - x) - (x - y)$, dans certains facteurs, on obtient $U^T = -U$. □

Exercice 60 [ENS 2023 # 69] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres de J et leur multiplicité.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
- Que peut-on dire de la matrice BJB ?
- Lorsque A est diagonale, calculer les valeurs propres de JA .
- Montrer plus généralement que toute valeur propre d'une matrice antisymétrique réelle est imaginaire pure.

Exercice 61 [ENS 2023 # 70] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_{n+1-i}$.

Démonstration. On montre que toutes les valeurs propres de la matrice extraite sont $\geq$ que celles de A .

D'une part la plus petite est $\geq \lambda_1$. D'autre part, la seconde est $\min_{\dim F=2} \max_{x \in F} \langle Ax, x \rangle$, qui est supérieur au même min sur tous les espaces.

On obtient l'autre inégalité en passant à l'opposé. □

Exercice 62 [ENS 2023 # 71] 1. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ Montrer que AB est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles.

2. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $f_{A,B}: X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \text{Tr}(AX) + \text{Tr}(BX^{-1})$. Montrer que $f_{A,B}$ admet un minimum $\mu_{A,B}$ atteint en une unique matrice $M_{A,B}$. Expliciter $\mu_{A,B}$ et $M_{A,B}$.

Démonstration. 1. En conjuguant par une racine de A , on obtient une matrice symétrique, def positive.

2. La question 1 permet de montrer que si les valeurs propres de X sont grandes, la trace est grande, puisque $\langle \sqrt{A}X\sqrt{A}^{-1}e_i, e_i \rangle = \langle X\sqrt{A}^{-1}e_i, \sqrt{A}^{-1}e_i \rangle$. Idem si une valeur propre de X devient petite.

En un point critique X , la différentielle doit être nulle, mais c'est $H \mapsto \text{Tr}(AH) - \text{Tr}(BX^{-1}HX^{-1})$ (pour H symétrique), on obtient $A = X^{-1}BX^{-1}$.

ou $XAX = B$, qui se met sous la forme $\sqrt{A}X\sqrt{A}\sqrt{A}X\sqrt{A} = \sqrt{A}B\sqrt{A}$: on a trouvé X . □

Exercice 63 [ENS 2023 # 72] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On définit $p(A)$ comme la dimension maximale d'un sous-espace V sur lequel $\forall x \in V \setminus \{0\}, \langle Ax, x \rangle > 0$. On définit de même $q(A)$ avec la condition $\langle Ax, x \rangle < 0$.

- Montrer que $p(A) + q(A) = \text{rg } A$.
- Montrer que, si A est inversible, alors p et q sont constantes sur un voisinage de A dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on suppose que $f: t \mapsto \det(A + tB)$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet au moins $|p(B) - q(B)|$ racines dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. • Simple.

- Elles sont localement croissante : si on a un témoin V , il suffit de témoigner sur l'intersection de V avec la sphère unité.
- Si B est définie positive, par coréduction ça marche. Sinon ?

Simplement, on regarde les valeurs propres de $A + tB$, quand $t \rightarrow +\infty$, elles ont le même signe que celles de B , et quand $t \rightarrow -\infty$, les signes opposés. Si B est inversible, on conçoit bien que pour passer d'un état à un autre, il faut que le nombre annoncé de racines changent de signe (ici, continuité des valeurs propres), qui se fait via la question précédente.

Si B n'est pas inversible. □

Exercice 64 [ENS 2023 # 73] On note $\lambda_1(M) \leq \dots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonné d'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si $1 \leq i, j \leq n$ et $i + j \geq n + 1$, que dire du signe de $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$?
- Soient $a \leq b$ deux réels, et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. On note X l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ vérifiant $[a, x] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Montrer que $X = [a, b]$.

Exercice 65 [ENS 2023 # 74] Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M) \leq \dots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de M .

1. On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Montrer que, si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.
2. Généraliser à $A_1, \dots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \dots + A_d \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. telle que $B = P^T A P$.

Démonstration. 1. $\lambda_i(A)$ est l'inf, sur $\text{Vect}(e_i, \dots, e_n)$ de $x^T A x$, de même, $\lambda_j(B)$ est l'inf sur $\text{Vect}(f_j, \dots, e_n)$ de $x^T B x$, mais ces deux espaces ont une intersection.

Exercice 66 [ENS 2023 # 75] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne. Soit $S \in \mathcal{S}_n$. On suppose que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S = M^T M - M M^T\}$ est non vide. On note $\gamma(S) = \inf_{M \in E} \|M\|^2$. Montrer que $\|S\| \leq \gamma(S) \leq 2\|S\|$.

Démonstration. Rmq : Si on écrit $M = OS$, on a $M^T M - M M^T = S^2 - OS^2 O^T$.

Comme les deux matrices sont définies positives, on a $\|M^T M - M M^T\| \leq \max(\|M^T M\|, \|M M^T\|)$, d'où $\|S\| \leq \gamma(S)$.

Pour l'autre inégalité : on peut supposer que S est diagonale, peut-on forcément trouver une matrice S^2 diagonale, et prendre O une matrice de permutation ? Oui : On prend σ une permutation, et $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_i - x_{\sigma(i)})$. Si σ est un n -cycle, le noyau est de dimension 1, donc f est surjective sur l'ensemble des n -uplets de somme nulle.

Puis on ordonne les valeurs propres de S en $\lambda_1 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_4 \geq \lambda_2$ et on prend $\sigma = (1\ 2 \dots n)$. Alors on cherche $x_1, \dots, x_n$ tels que $x_1 - x_2 = \lambda_1, x_2 - x_3 = \lambda_2, \dots, x_n - x_1 = \lambda_n$.

On a, pour tout i , $x_1 - x_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_i$, et on prend un des x_i égal à 0 est nul, donc $|x_1| \leq 2 \sup |\lambda_i|$, puisque la somme est alternée. □

Exercice 67 [ENS 2023 # 76] 1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T A P$.

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Proposer une définition naturelle de $f(A)$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. On note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne. Pour A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on pose $d(A, B) = \left\| \ln \left(\sqrt{A^{-1}} B \sqrt{A^{-1}} \right) \right\|$.

Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4. Soient $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $d(P^T A P, P^T B P) = d(A, B)$.

Démonstration. 1.

2. On applique f sur les coefficients diagonaux. Il faut justifier que ça ne dépend pas de la décomposition diagonale...

3. Utilise le fait que les valeurs propres extrêmes de $Y^{-1} B Y^{-1}$ sont égales à $\sup \frac{\langle B X, X \rangle}{\langle Y^2 X, X \rangle}$, et l'inf. □

Exercice 68 [ENS 2023 # 77] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X, Y) \mapsto \text{Tr } X^T Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $L(M) : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M X$. Montrer que L est un morphisme d'algèbre injectif.

3. Soit $\|\cdot\|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ subordonnée à $\|\cdot\|_2$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|L(M)\| \leq \|M\|_2$.

4. Montrer que $\|M^T\|_2 = \|M\|_2$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1.

2. Ok.

3. C'est clair, vu que le produit matriciel est colonne par colonne et que $\frac{a+b}{c+d} \leq \max \frac{a}{c}, \frac{b}{d}$.

4. $\|M\| = \sup \langle M X, Y \rangle$ □

Exercice 69 [ENS 2023 # 78] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée à la norme $X \mapsto \sqrt{X^T X}$.

1. Soient A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $e^{iA} - e^{iB} \leq \|A - B\|$.

2. Démontrer le même résultat sous l'hypothèse que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\bar{A}^T = A$ et $\bar{B}^T = B$.

Démonstration. 1. Facile si A, B commutent.

On veut montrer que $\exp$ est 1-lip sur les anti-hermitiennes.

- Commencer par montrer que $\|e^{iA}\| = 1$ (norme subordonnée), car unitaire. On peut le faire grâce au théorème spectral.
- Puis on montre que $\|e^{iA} e^{-iB} - I_n\| \leq \|A - B\|$, en considérant $\varphi : t \mapsto e^{itA} e^{-itB}$.
- On peut aussi utiliser l'expression intégrale de la différentielle : $de^X(Y) = \int_0^1 e^{(1-u)X} Y e^{uX} du$ (se retrouve en développant, et intégrant terme à terme).
- Sinon, on a $\|A^k - B^k\| \leq \|A - B\| (\sum \|A\|^i \|B\|^{k-1-i})$ (en écrivant $A^k - B^k$ comme une somme de termes), d'où $\|A^k - B^k\| \leq \|A - B\| \frac{e^{\|A\|} - e^{\|B\|}}{\|A\| - \|B\|}$.
- On écrit alors $e^{iA} - e^{iB} = (e^{iA/2} - e^{iB/2}) e^{iA/2} - e^{iB/2} (e^{iA/2} - e^{iB/2})$, de même avec $e^{iA/m}, e^{iB/m}$ comme somme de m termes, dont chaque facteur est $(e^{iA/m} - e^{iB/m})$ et un facteur unitaire. La majoration précédente permet de conclure. □

Exercice 70 Soit $\|\cdot\|$ une norme multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\|A\| \neq \|B\|$, montrer que $\|e^A - e^B\| \leq \frac{e^{\|A\|} - e^{\|B\|}}{\|A\| - \|B\|}$.

2) Analyse

Exercice 71 Soit $k \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=0}^k f^{(j)}(x)$ admette une limite quand $x \rightarrow +\infty$. Peut-on en déduire que f admet une limite en $+\infty$, selon la valeur de k ?

Démonstration. Si $\sum_{j=0}^k f^{(j)}(x) = k$, on regarde l'équation homogène, dont l'équation caractéristique est $1 + X + \dots + X^k = 0$, et dont le comportement est décidé par le signe de la partie réelle des racines. Si $k = 1$ c'est bon, si $k = 2$, c'est bon aussi, pour $k = 3$, on a $\pm i$ comme racines, donc ce n'est plus le cas.

Reste à traiter les cas $k = 1, 2$ en général, par des variations de la constante. □

Exercice 72 [ENS 2023 # 79] Soit $p > 1$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Montrer l'inégalité de Hölder.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner la boule unité de la norme p pour plusieurs valeurs de p .

Exercice 73 [ENS 2023 # 80] Soient $a \leq b$ deux réels, et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_i O_i$. On note X l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $[a, x] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Montrer que $X = [a, b]$.

Exercice 74 [ENS 2023 # 81] THÉORÈME DE BROUWER Soient K un compact convexe non vide d'un espace normé E , f un endomorphisme continu de E tel que $f(K) \subset K$. Montrer que f admet un point fixe dans K .

Démonstration. Si non, on a une application $f: K \rightarrow \partial K$ qui préserve $\partial K = S^1$.

Alors, on prend $g: (r, \theta) \mapsto f(re^{i\theta})$, c'est une déformation d'un truc constant sur un tour du cercle, impossible. □

Exercice 75 [ENS 2023 # 82] Peut-on écrire $]0, 1[$ comme réunion dénombrable disjointe de segments d'intérieurs non vides?

Démonstration. Non. Par l'absurde, on fait de la dichotomie, entre des segments, dont la distance tend vers 0, alors la limite n'appartient à aucun segment. □

Exercice 76 [ENS 2023 # 83] Pour tout réel x dans $[0, 1[$, on note $0, x_1 x_2 x_3 \dots$ le développement décimal propre de x . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Soit a un réel tel que $0 < a < 9$. On définit $P_n = \{x \in [0, 1[; S_n(x) \leq na\}$ et $P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$. Montrer que P est compact, non vide, d'intérieur vide et sans point isolé.

Démonstration. P est borné et fermé, car S_n est continue inférieurement. Clairement non vide et d'intérieur vide. Si $x \in P$, en retirant 1 à un chiffre de x arbitrairement grand, on reste dans P . Possible sauf si x est décimal, auquel cas on peut ajouter 1. □

Exercice 77 [ENS 2023 # 84] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que la classe de similitude de A est fermée si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 78 [ENS 2023 # 85] • On note D le disque unité du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de parties de D telle que :

- ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_i soit un carré de $\mathbb{R}^2$ dont les côtés sont parallèles aux axes;
- ▷ les C_i soient d'intérieurs deux à deux disjoints;
- ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Aire}(C_i) = \pi$.
- On note $C = [-1, 1]^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de parties de C telle que :
 - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble D_i soit un disque fermé de $\mathbb{R}^2$;
 - ▷ les D_i soient d'intérieurs deux à deux disjoints;
 - ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Aire}(D_i) = 4$.

Démonstration. • Utiliser un quadrillage, en divisant la taille à chaque étape.

- Par étape, on met un cercle, puis on quadrille, et on peut choisir des petits carrés qui remplissent une proportion $> \frac{1}{2}$ du vide (car le vide est délimité par un nombre fini de courbes régulières), puis dans chaque carré on met un cercle. □

Exercice 79 [ENS 2023 # 86] Soit $d \geq 1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.

1. On pose $A = \{(P, x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}; P(x) = 0\}$ et $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de A dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$.
2. On pose $B = \{P \in \mathcal{P}; \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \neq 0 \text{ ou } P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de B dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Démonstration. 1. Par translation, on peut passer de (P, x) à $(\tilde{P}, 0)$. Alors $P = X^n + Q + \alpha X$, avec $\alpha \neq 0$. On peut ramener Q à 0, et α à ± 1 . Deux composantes connexes, selon le signe de $\alpha = P'(x)$.

2. B est l'ensemble des polynômes unitaires à racines simples. Le nombre de racines simples est un invariant, et réciproquement, ces morceaux sont clairement connexes par arcs. □

Exercice 80 [ENS 2023 # 87] Soient $(M_k)_{k \geq 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \rightarrow +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $\frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} \rightarrow N$.

Démonstration. On peut extraire $\frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|}$ convergent, vers Π .

Si Π a une valeur propre complexe X , comme $\left\| \frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} - \Pi \right\| \leq \varepsilon$, on a une valeur propre complexe proche de λ , donc $M_{\varphi(k)}$ a une valeur propre qui tend vers $+\infty$. □

Exercice 81 [ENS 2023 # 88] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module < 1 . Montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $\|A\| < 1$.

Démonstration. Trigonaliser, puis conjuguer par une matrice diagonale pour n'avoir que des petits coefficients hors de la diagonale. $\square$

Exercice 82 [ENS 2023 # 89] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de lignes $L_1, \dots, L_n$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|L_i\|_2 = 1$ et la distance euclidienne canonique de L_i au sous-espace engendré par les L_j , pour $j \neq i$, est supérieure ou égale à ε . Montrer que A est inversible et que $\sup \{\|A^{-1}x\|_2; x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = 1\} \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Démonstration. A est inversible car aucune ligne n'est combinaison linéaire des autres.

Si $x = E_i$, on considère les colonnes de A^{-1} , notées C_i . On $\langle C_i, L_i \rangle = 1$ et C_i orthogonal aux autres lignes, ce qui donne $\|C_i\|_2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$, peut-être.

Ensuite, c'est le fait qu'une moyenne d'éléments de norme $\leq K$ est de norme $\leq K$. $\square$

Exercice 83 [ENS 2023 # 90] On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On fixe $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ non nulle à support compact, et on note $W(g)$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto g(x - n)$, n décrivant $\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des réels t tels que $\{x \mapsto f(x - t), f \in \overline{W(g)}\} = \overline{W(g)}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

Démonstration. • Si $f \in \overline{W(g)}$, alors f est à support compact.

• Γ est clairement un sous-groupe, contenant $\mathbb{Z}$.

• Si Γ est dense en 0, alors il existe une suite ε_n telle que $g(x - \varepsilon_n) \in \overline{W(g)}$. En considérant le minimum du support de g , c'est impossible. M'enfin, $W(g)$ m'a l'air fermé... $\square$

Exercice 84 [ENS 2023 # 91] Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles de limite 1 et (u_n) une suite réelle strictement positive telle que, pour tout n , $u_{n+2} = a_{n+1}u_{n+1} + b_{n+1}u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \frac{\ln(u_n)}{n}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.

Démonstration. Soit m . On peut écrire $u_{a+n} = G_{n,a}u_a + G_{n+1,a}u_{a-1}$ et $u_{a+n+1} = G_{n+1,a}u_a + G_{n+2,a}u_{a-1}$, où $G_n \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} F_n$, ce qui permet de conclure, puisque $\frac{G_{n,a}}{G_{n+1,a}}$ et $\frac{G_{n+1,a}}{G_{n+2,a}}$ sont proches de φ .

w_n s'obtient à partir de v_n par Césaro. $\square$

Exercice 85 [ENS 2023 2023 # 92] 1. Si $n \geq 2$ est un entier, montrer que $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^n \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor$.

2. Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor$, puis un développement asymptotique à deux termes.

Démonstration. 1. Le premier compte les puissances de k inférieures à n , dont k^1 .

Le second compte les puissances j -èmes inférieures à n .

2. En coupant la somme en $k = \sqrt{n}$, on a du $\sqrt{n} \ln n + (n - \sqrt{n})n$, d'où un équivalent à n .

En suite, on prend l'autre expression, on retire n . Le premier terme est $\sqrt{n}$. Les termes non nuls correspondent à $\sqrt[j]{n} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 2^j$, donc les autres termes sont au plus en $\sqrt[3]{n} \ln n$, d'où le DSA $n + \sqrt{n} + o_{+\infty}(\sqrt{n})$. $\square$

Exercice 86 [ENS 2023 # 93] Soient $\alpha > 0$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante à valeurs dans $]0, 1[$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 > 0$ tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.

Démonstration. • Si $u_n > 1$, on tend vers ∞ .

• Si $u_n^\alpha + \sup a_n < 1$, on tend vers 0.

• Si $u_0 < v_0$, $\forall n$, $u_n < v_n$.

• Si $u_n \rightarrow \ell_1$ et $v_n \rightarrow \ell_2$, on a $u_n^\alpha + a_n \rightarrow 1$ et $v_n^\alpha + a_n \rightarrow 1$, donc $\ell_1 = \ell_2$.

• De plus $\frac{u_n}{v_n}$ est monotone, donc il y a au plus une valeur de u_0 qui converge.

• Les ensembles où $u_n \rightarrow +\infty$ et $u_n \rightarrow 0$ sont ouverts. $\square$

Exercice 87 [ENS 2023 # 94] Soit (u_n) une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin(\ln n)$. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) .

• Montrer que, pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$.

• Montrer que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$.

• Montrer que V est un intervalle inclus dans $[-1, 1]$, puis que $V = [-1, 1]$.

Exercice 88 [ENS 2023 # 95] Si A est une partie de $\mathbb{N}^*$, on dit que A admet une densité si la suite $\left(\frac{|A \cap \llbracket 1, n \rrbracket|}{n} \right)_{n \geq 1}$ admet une limite. Cette limite est alors notée $d(A)$.

• Si $m \in \mathbb{N}^*$, quelle est la densité de l'ensemble des multiples de m dans $\mathbb{N}^*$?

• Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité. Montrer que $A \cup B$ admet une densité que l'on précisera.

• Donner un exemple de partie de $\mathbb{N}^*$ n'admettant pas de densité.

Exercice 89 [ENS 2023 # 96] On considère une suite $a \in \{2, 3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n -ième occurrence de 2 et la $(n+1)$ -ième occurrence de 2 soit égal à a_n .

Étudier la convergence de la suite de terme général $\frac{1}{n} \text{Card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_k = 3\}$.

Démonstration. • On écrit les premiers termes de la suite : $a_1 = 2, a_2 = a_3 = 3, a_4 = 2, a_5 = a_6 = a_7 = 3, a_8 = 2, a_9 = a_{10} = a_{11} = 3, a_{12} = 2, a_{13} = a_{14} = 3, a_{15} = 2$.

- On note n_k l'indice du k -ième 2. On a $n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 8, n_4 = 12, n_5 = 15$.
- On obtient $n_{n_k+1} = n_k + 1 + (2 \times k + 3 \times (n_k - k)) = 4n_k + 1 - k$, donc $n_{n_k} = 4n_k - k - 2$.
- On a alors $p_{n_{n_k}} = \frac{1}{4 - p_{n_k} - \frac{2}{n_k}}$.
- (La solution de $\ell = \frac{1}{4-\ell}$ est irrationnelle.)
- La suite $p_{n_1^{(k)}}$ converge vers ℓ .
- Un peu galère, mais on peut en déduire que (p_{n_k}) converge vers ℓ , donc que (p_n) converge vers ℓ (les n_k sont distants d'au plus 3).

En fait, on a $n_k = (a_0 + 1) + \dots + (a_{k-1} + 1)$, donc $n_k = 4k - \#\{n_i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket\}$. $\square$

Exercice 90 [ENS 2023 # 97] On considère une suite $a \in \{2, 3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n -ième occurrence de 2 et la $(n+1)$ -ième occurrence de 2 soit égal à a_n . Montrer qu'il existe un unique irrationnel α tel que les indices $n \geq 1$ tels que $a_n = 2$ soient exactement les entiers de la forme $\lfloor m\alpha \rfloor + 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On sait que la proportion de terme qui vaut 2 tend vers la solution à $\ell = \frac{1}{4-\ell}$, c'est-à-dire $2 + \sqrt{3}$.

On vérifie que ça marche : il s'agit de justifier qu'en notant $n_k = \lfloor k\alpha \rfloor + 1$, n_k est bien égal à $4k - \#\{n_i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket\}$. $\square$

Exercice 91 [ENS 2023 # 98] Une suite réelle (x_n) est dite équirépartie modulo 1 si elle vérifie, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k x_n} = 0$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(n\alpha)$ est équirépartie modulo 1.
2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{n+h} - x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie ; on veut montrer que (x_n) est équirépartie modulo 1.

a) Soit (a_n) une suite de complexes de module ≤ 1 . Montrer, pour tous $N, H \in \mathbb{N}^*$: $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq \left| \frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_{n+h} \right| + \frac{2H}{N}$.

b) Montrer que $\left| \frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_{n+h} \right| \leq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \sum_{h=0}^{H-1} \frac{a_{n+h}}{H} \right|^2}$.

c) Conclure.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et de coefficient dominant irrationnel. Montrer que $(P(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1.
4. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle équirépartie modulo 1, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f.$

Démonstration. 1. $\square$

- 2.
- 3.
- 4.

Exercice 92 [ENS 2023 # 99] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note A_n la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ou, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $a_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_n^q)\right)_{n \geq 2}$.

Démonstration. Pour q impair la trace est nulle.

Pour q pair, en interprétant comme un graphe, on obtient quelque chose proche de sommes de Riemann, et on tend vers $\left(\frac{q}{2}\right) \int_0^1 f(x)^q dx$. $\square$

Exercice 93 [ENS 2023 # 100] Montrer la convergence et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

Démonstration. Pour la convergence : regrouper deux par deux.

Pour le calcul, c'est $\sum_{m=1}^{+\infty} m \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{(-1)^k}{k}$.

On écrit $\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} = 2 \sum_{k=2^m; k \text{ pair}}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k} = 2F_m - F_{m-1} - F_{m+1}$, où $F_m = H_{2^m-1}$.

En écrivant une somme partielle, et en telescopant, il reste une différence de deux H_n grands, qui donne du γ . $\square$

Exercice 94 [ENS 2023 # 101] On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$. On se donne une suite presque nulle $v \in \ell^2(\mathbb{N})$ ainsi qu'une suite $(u_k)_k$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ (l'élément u_k est donc noté $(u_{k,i})_{i \in \mathbb{N}}$). On suppose que, pour tout entier $p \geq 2$, la suite de terme général $w_k = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{k,n})^p$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_n)^p$. Montrer que $\inf_{\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})} \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{k,\sigma(n)} - v_n)^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

Démonstration. On peut supposer que les (v_n) sont décroissants, (par inégalité de réordonnement).

On montre par récurrence sur n que $u_{k,n} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} v_n$. Pour $n = 1$, si ce n'était pas le cas, pour p très grand, on serait loin de la limite. Puis c'est de la convergence dominée. $\square$

Exercice 95 [ENS 2023 # 102] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et telle que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

Démonstration. Facile. □

Exercice 96 [ENS 2023 # 103] Soient I un intervalle ouvert, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $[a, b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.

Démonstration. On peut supposer $f'(a) = f'(b) = 0$. À relier. □

Exercice 97 [ENS 2023 # 104] Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit dérivable en aucun point.

Exercice 98 [ENS 2023 # 105] Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 2$, f^n (puissance) soit polynomiale.

Démonstration. f^2 et f^3 polynomiales, donc f est une fraction rationnelle, $f \in \mathbb{Q}(x)$ et $f^2 \in \mathbb{Q}[X]$ impliquent $f \in \mathbb{Q}[X]$. □

Exercice 99 [ENS 2023 # 106] Soit $p > 1$ un réel. Montrer qu'il existe une constante $k_p > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x|^p + |y|^p = 2$, on ait $(x - y)^2 \leq k_p (4 - (x + y)^2)$.

Démonstration. On veut montrer que $\frac{(x-y)^2}{4-(x+y)^2}$ est majorée.

Rmq : l'inégalité de Hölder donne $(x + y)^2 \leq 4$ avec égalité si et seulement si $(x, y) = (1, 1)$. Ce que l'on peut retrouver par de l'optimisation sous contrainte.

Si une suite tend vers $+\infty$, nécessairement $x_n + y_n \rightarrow 2$, donc nécessairement $(x_n, y_n) \rightarrow (1, 1)$.

On considère $f(x, y) = 4 - (x + y)^2$, on peut écrire un DL à l'ordre 2 en $(1, 1)$, que l'on peut trouver algébriquement : $f(x, y) = -(x - 1)^2 - (y - 1)^2 - 2(x - 1) - 2(y - 1) - 2(xy - 1)$, où $xy - 1 = (x - 1)(y - 1) + x - 1 + y - 1$, donc $f(x, y) = -(x - 1)^2 - (y - 1)^2 - 4(x - 1) - 4(y - 1) - 2(x - 1)(y - 1)$.

Ensuite, on considère $g(x, y) = x^p + y^p$, et un DL à l'ordre 2, qui donne $g(x, y) - g(1, 1) = p(x - 1) + p(y - 1) + p(p - 1)(x - 1)^2 + p(p - 1)(y - 1)^2 + o_0(\|\cdot\|^2)$.

En l'injectant dans f , on obtient $f(x, y) = (x - 1)^2(-1 + 4(p - 1)) + (y - 1)^2(-1 + 4(p - 1)) - 2(x - 1)(y - 1)$, et par ailleurs $(x - 1) = -(y - 1)$, donc on trouve $f(x, y) = (x - 1)^2(-1 + 4(p - 1) + 1) + (x - 1)^2(-1 + 4(p - 1) + 1)(y - 1)^2$. □

Exercice 100 [ENS 2023 # 107] DUALITÉ DE LEGENDRE Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On note $f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (sx - f(x))$ et $f^{**}(x) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (sx - f^*(s))$.

Montrer que $f^{**}(x) = \sup_{\substack{a \text{ affine} \\ a \leq f}} a(x)$.

Démonstration. Supposons que $f > 0$, et montrons que $f^{**} \geq 0$, c'est-à-dire que pour tout x , il existe s tel que $sx - f^*(s) \geq 0$, mais $f^*(0) = \sup_x (-f(x))$, d'où le résultat.

Cela démontre que $f^{**}(x) \geq \sup_{\substack{a \text{ affine} \\ a \leq f}} a(x)$.

Par ailleurs f^{**} est convexe.

Par ailleurs, $f^{**} \leq f$: On a $f^{**}(x) = \sup_s sx - f^*(s)$, et pour tout s , $sx - f^*(s) \leq f(s) \Leftrightarrow f^*(s) \geq sx - f(s)$, ce qui est immédiat. □

Exercice 101 [ENS 2023 # 108] Soient I un ensemble fini et $(P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes réels stable par dérivation. On définit une fonction signe par $\text{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $\text{sign}(0) = 0$.

Pour $\varepsilon \in \{-1, 1, 0\}^I$, soient $A_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall i \in I, \text{sign}(P_i(t)) = \varepsilon(i)\}$ et

$B_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall i \in I, \text{sign}(P_i(t)) \in \{\varepsilon(i), 0\}\}$.

- Montrer que A_ε est soit vide, soit réduit à un point, soit un intervalle ouvert.
- Si A_ε est non vide, montrer que B_ε est l'adhérence de A_ε . Si A_ε est vide, montrer que B_ε est soit vide soit un singleton.

Démonstration. • Soit $a, b \in A_\varepsilon$.

- ▷ Si un polynôme P_i passe de 0 à 0, une de ses dérivées doit changer de signe entre a et b , impossible (prendre la première dérivée avec une seule racine entre a et b).

S'il passe de $+$ à $+$, il doit rester $+$ tout du long, sinon une de ses dérivées changerait de signe (la première avec une seule racine).

- ▷ Pour le caractère ouvert : on vient de voir que si A_ε contient au moins deux points, $\varepsilon(i)$ ne peut pas prendre la valeur 0. Puis cela découle du caractère fini de I .

•

□

Exercice 102 [ENS 2023 # 109] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

- Soient $x_0, \dots, x_{n-1}$ des points de I .

- ▷ sV2 Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \dots, x_{n-1}$. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

- ▷ On note $V(x_0, \dots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde associé à $(x_0, \dots, x_n)$. Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} V(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

- On suppose que $n = 2$, que I est un segment et que f est strictement convexe. On note $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de f . Montrer qu'il existe une constante C , dépendant uniquement de I et f , telle que le nombre de points de $\Gamma_f \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z}^2$ soit majoré par $C N^{2/3}$ pour tout entier $N \geq 1$.

Démonstration. 1.

a)

- b) On part du déterminant de Vandermonde. Par des opérations sur les colonnes, on transforme la dernière en $P(x_i) - f(x_i)$, où P est un polynôme de degré $\leq n - 1$.

On choisit pour P le polynôme d'interpolation de f en $x_0, \dots, x_{n-1}$.

Alors le déterminant vaut $(f(x_n) - P(x_n))V(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Par ailleurs, on sait que $f(x_n) - P(x_n) = \frac{\lambda}{n!}(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})$ (choisir λ pour que ce soit correct en x_n), et on obtient $\lambda = f^{(n)}(\tau)$.

2. En trois points $\frac{i}{N}, \frac{j}{N}, \frac{k}{N}$ qui vérifient la condition, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & i & f(x_i)N \\ 1 & j & f(x_j)N \\ 1 & k & f(x_k)N \end{vmatrix} = \frac{f^{(2)}(\tau)}{2} \begin{vmatrix} 1 & i & i^2 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & k & k^2 \end{vmatrix},$$

donc $(i - j)(j - k)(i - k) = \frac{Nk}{f^{(2)}(\tau)}$, si $f^{(2)}(\tau) \neq 0$, où k est un entier.

En particulier, il existe une constante C telle que l'un des trois facteurs soit $\geq C N^{1/3}$. Cela implique la borne en $N^{2/3}$.

Si $f^{(2)}$ s'annule, on applique ce qui précède sur chaque deux intervalles sur lequel ce n'est pas le cas. □

Exercice 103 [ENS 2023 # 110] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$.

- Montrer que $(w_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
- Etablir une relation de récurrence entre w_{n+2} et w_n .
- Sans utiliser la formule de Stirling, déterminer un équivalent simple de w_n .
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$.

Exercice 104 THÉORÈME DE ROUCHÉ [ENS 2023 # 111] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.

1. Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} P'(e^{it})}{P(e^{it})} dt$.
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

Démonstration. 1. Écrire $\frac{P'}{P}$ en éléments simples, puis développement en série à l'intérieur de l'intégrale.

2. Prendre un arc continu entre les deux. □

Exercice 105 [ENS 2023 # 112] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x) dx$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n}(x) dx$. On admet que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2nA_n = (2n - 1)A_{n-1}$.

- Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{2B_0}{A_0} - \frac{2B_n}{A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ puis que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 106 [ENS 2023 # 113] Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et presque périodique c'est-à-dire telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x + nT) - f(x)| \leq \varepsilon$. SUP

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et presque périodique.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t} \int_0^t f$ possède une limite quand $t \rightarrow +\infty$.

Démonstration. 1. Easy.

2. Si la quantité donnée n'admettait pas de limite, on trouverait deux suites extraites, à distance ε l'une de l'autre.

Pour $\varepsilon/2$, il existe T . Alors $g(nT)$ est proche à $\varepsilon/2$ près de $g(T)$. Mieux que ça, la fonction est bornée, donc la différence entre $g(nT)$ et $g(nT + u)$ est petite. □

Exercice 107 [ENS 2023 # 114] Soit f une fonction continue par morceaux et croissante de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^1 f(x)e^{i\lambda x} dx = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ SUP

Exercice 108 [ENS 2023 # 115] • Es On admet l'existence d'une notion d'intégrale multiple sur un rectangle de $\mathbb{R}^n$, et que pour des fonctions continues $f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{[0,1]^n} f_1(x_1) \dots f_n(x_n) dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^n \int_0^1 f_i(x) dx.$$

- Soient $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ des fonctions de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit A la matrice de terme général $A_{i,j} = \int_0^1 f_i(x)g_j(x) dx$. On pose $B(x_1, \dots, x_n) = \det(f_i(x_j))$ et $C(x_1, \dots, x_n) = \det(g_i(x_j))$. Montrer que $\int_{[0,1]^n} B(x_1, \dots, x_n) C(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = n! \det(A)$.
- s Montrer que si $\det A = 0$, alors la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.
- s En déduire que si $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $(f_i(x_j))$ soit inversible.

Démonstration. Le produit des déterminants est $\sum_{\sigma, \sigma'} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n f_i(x_{\sigma(i)}) \prod_{i=1}^n g_i(x_{\sigma'(i)}) = \sum_{\sigma, \sigma'} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n f_{\sigma(i)}(x_i) g_{\sigma'(i)}(x_i)$. Quand on l'intègre, on obtient $\sum_{\sigma, \sigma'} \varepsilon(\sigma') \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \int_0^1 f_{\sigma(i)}(x) g_{\sigma'(i)}(x) dx$, et l'intégrale ne dépend que de $\sigma^{-1} \circ \sigma$, ce qui permet d'obtenir le résultat. □

Exercice 109 [ENS 2023 # 116] • La fonction $f: x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ est-elle uniformément continue ?

- Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et telle que f' est uniformément continue. Est-ce que f' a une limite en $+\infty$?

Démonstration. • □

Exercice 110 [ENS 2023 # 117] Soient $d, N \in \mathbb{N}$ tels que $N > d$. Soient $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels de degré au plus d et $x_1, \dots, x_N$ des réels distincts. On suppose que pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la suite $(P_n(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que l'on peut extraire de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers un polynôme de degré au plus d .

Exercice 111 [ENS 2023 # 118] Montrer que la suite de fonctions de terme général $f_n: x \mapsto (\sin x)^n \cos(x)$ converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 112 [ENS 2023 # 119] On note I (resp. S) l'ensemble des fonctions $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq a\}$ est fermé (resp. de même avec l'inégalité dans l'autre sens).

- Montrer que $S \cap I$ est l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.
- Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. On pose $f_n: x \mapsto \inf(\{1\} \cup \{f(y) + n|x - y|, y \in [0, 1]\})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est continue pour tout n , que la suite (f_n) est croissante et que $f \in I$ si et seulement si la suite (f_n) converge simplement vers f .

Exercice 113 [ENS 2023 # 120] Soit $\Lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^k$ avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
2. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.
3. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \underset{s \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{s-1} + O(1)$.
4. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s \rightarrow 1^+}{=} \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1)$. Qu'en déduire ?

Démonstration. □

Exercice 114 [ENS 2023 # 121] Soit $q \geq 2$ entier. On se donne un caractère non trivial χ sur le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, c'est-à-dire un morphisme de groupes non constant $\chi: ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times) \rightarrow (\mathbb{U}, \times)$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, on pose alors $\tilde{\chi}(m) = 0$ si q n'est pas premier avec m , et $\tilde{\chi}(m) = \chi(\overline{m})$ sinon (ou $\overline{m}$ désigne la classe de m modulo q).

- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\chi(m)}{m^s}$ converge si et seulement si $s > 0$.
- Montrer que la fonction $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 115 [ENS 2023 # 122] Soient $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$. Quelle est la limite de g en 0^+ ?

Démonstration. C'est $\sum f(2nx) - f((2n+1)x) = \sum \int_{2nx}^{(2n+1)x} f'(t) dt$. Cela tend vers $\frac{1}{2}f(0)$, en découpant sur un segment, et en utilisant l'uniforme continuité de f' . □

Exercice 116 [ENS 2023 # 123] Pour tout polynôme trigonométrique $P: \theta \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(P) e^{ik\theta}$ (somme à support fini) et pour tout $d \in \mathbb{R}$, on pose $\|P\|_{h^d}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(P)|^2 (1 + |k|)^{2d}$.

On admet que $\|\cdot\|_{h^d}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ des polynômes trigonométriques pour tout $d \in \mathbb{R}$. Soit E l'espace des fonctions continues par morceaux et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit le produit de convolution de deux fonctions $f, g \in E$ par : $f \star g: \varphi \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)g(\varphi - \theta)d\theta$. Enfin, on pose, pour $f \in E$, $\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$.

1. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ et $c = c(d) \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tous $f, g \in \mathcal{T}$, $\|f \star g\|_2 \leq c(d) \|f\|_{h^d} \|g\|_2$.
2. Déterminer tous les réels d vérifiant la condition de la question précédente.
3. Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π -periodique. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta$ et, pour tout $d \in \mathbb{R}$, $\|f\|_{h^d}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 (1 + |k|)^{2d}$. Déterminer les $d \in \mathbb{R}$ tels que $\|f\|_{h^d} < +\infty$.
4. Soient f, g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π -périodiques et $d \in \mathbb{R}$. Calculer $\|f \star g\|_{h^d}$.

Démonstration. 1. $\|f\|_2 \leq C \|f\|_\infty$ et Cauchy-Schwarz.

2. Pour $d \geq 0$, ok. Pour $d < 0$, en prenant $f = g = e_k$, on obtient une contradiction.
3. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, par IPP, les $c_k(f)$ sont négligeables devant toutes puissances de k .
4. Ça devrait être $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)| |c_k(g)| (1 + |k|)^{2d}$, avec un peu de chance. □

Exercice 117 [ENS 2023 # 124] Soient $p \geq 2$ et $q \geq 2$ deux entiers tels que $p \wedge q = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose $f(z) = \frac{1-z^{pq}}{(1-z^p)(1-z^q)}$. Écrire $f(z)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ et trouver le plus grand $n \geq 0$ tel que $c_n = 0$.

Démonstration. $f(z) = (1 - z^{pq}) (\sum d(n) z^n)$, où $d(n)$ est le nombre de représentation de n comme combinaison linéaire de p et q , puis $c(n) = d(n) - d(n - pq)$. Pour $n \geq pq$, c'est clairement > 0 , et pour $n \leq pq$, c'est le problème de Frothenthal ou je ne sais quoi. □

Exercice 118 [ENS 2023 # 125] Soient $R > 0$, f et g deux fonctions développables en série entière sur $] -R, R[$ telles que $\forall x \in] -R, R[, \int_0^x f(t)g(x-t) dt = 0$. Montrer que l'une au moins des deux fonctions f et g est identiquement nulle sur $] -R, R[$.

Démonstration. La dérivée est $f(x)g(0) + \int_0^x f(t)g'(x-t) dt$, donc $f(0)g(0) = 0$. On suppose que $g(0) = 0$. Alors on recommence, avec g' .

Si à la place $f(0) = 0$, on échange f et g . □

Exercice 119 [ENS 2023 # 126] Soient $f: z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et $g: z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.

1. Déterminer les rayons de convergence de f et g .
2. Trouver les complexes $z \in \mathcal{S}(0, 1)$ tels que $f(z)$ converge.
3. Montrer que f admet un prolongement $\tilde{f}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, développable en série entière en tout point de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
4. Montrer que $|g(r)| \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow 1$ avec $r \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que, si $z \in \mathcal{B}(0, 1)$, alors $g(z^2) = g(z) - z$.
6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{U}_{2^n}$. Montrer que $|g(r\alpha)| \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow 1$ avec $r \in \mathbb{R}$.
7. Soit $h: z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n+1}}{2^{n+1}}$. Montrer que h est continue sur $\overline{\mathcal{B}}(0, 1)$.
8. Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathcal{S}(0, 1)$, $\varepsilon > 0$ et $\tilde{h}$, prolongement de h sur $\overline{\mathcal{B}}(0, 1) \cup \mathcal{B}(z_0, \varepsilon)$, la fonction $\tilde{h}$ n'est pas développable en série entière en z_0 .

Démonstration. •

- Aucun.
- Le prolongement est $\frac{1}{1-z}$.
- Simple.
- Simple.
- Simple.
- CVN.
- Si elle l'était, sa dérivée sur un voisinage de z_0 intersecté avec $\mathcal{B}(0, 1)$ coïnciderait avec g , mais g n'est pas bornée. □

Exercice 120 [ENS 2023 # 127] Soit $\alpha = (\alpha_i)_{i \geq 1}$ une suite de $\mathbb{Z}$ nulle à partir d'un certain rang. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \prod_{i \in \mathbb{N}^*} ((in)!)^{\alpha_i}$.

1. Déterminer, selon la valeur de α , le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} u_n z^n$.
Dans la suite, on note f la somme de cette série entière.
2. Expliciter f si $\alpha = (-\delta_{i,1})_{i \geq 1}$.
3. Pour une somme g de série entière sur un intervalle $] -a, a[$ non trivial, on pose $\Delta(g): z \mapsto zg'(z)$. Expliciter $P(\Delta)(g)$ lorsque $g: z \mapsto z^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
4. Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite complexe, et $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{P(n+1)}$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} v_n z^n$ a un rayon de convergence non nul et donner une méthode simple pour trouver une équation différentielle linéaire non triviale à coefficients polynomiaux dont sa somme est solution.
5. Résoudre le même problème lorsqu'il existe P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ telles que $v_{n+1} = \frac{Q(n+1)}{P(n+1)} v_n$ pour tout $n \geq 1$, et en supposant cette fois-ci que $\deg(Q) \leq \deg(P)$.
6. Justifier que le cadre de la question s'applique bien à la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ lorsque $R > 0$.

Démonstration. 1. Dépend de $\sum \alpha_i$.

2. $f(z^i) = \sum_{\omega} e^{\omega z}$
3. $P(\Delta)(x^k) = P(k)x^k$

4. $P(\mathbb{N})$ est minoré, donc $v_n \geq \frac{c}{k^n}$.

Appliquer $P(\Delta)$. □

Exercice 121 [ENS 2023 # 128] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n! (30n)!}{(15n)! (10n)! (6n)!}$.

- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
- Trouver une équation différentielle vérifiée par la somme de la série entière précédente.

Démonstration. • Legendre.

- Stirling. Quelque chose !

• Il existe des polynômes P, Q tels que $u_{n+1} = \frac{Q(n+1)}{P(n+1)} u_n$. Quand on prend g et qu'on dérive puis multiplie par z , on transforme u_n en nu_n . □

Exercice 122 [ENS 2023 # 129] Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$?

Démonstration. Cf un précédent □

Exercice 123 [ENS 2023 # 130] • Soit $f: z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. Montrer que, pour tout $0 < r < R$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

- Soit f une fonction développable en série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose que f est prolongeable par continuité sur le disque ferme $D_f(0, 1)$. Expliquer pourquoi la formule de Cauchy ci-dessus reste vraie pour $r = 1$.
- Soit $f: x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} e^{-\frac{1-x}{1+x}}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
- On admet que le rayon de convergence du développement de f en 0 vaut 1. Montrer que les coefficients du développement en série entière en 0 de f sont bornés par $M > 0$.
▷ s Exprimer M en fonction de f .

Démonstration. •

•

• C'est du $e^{\frac{1}{1+x}}$, c'est de la composée...

• On peut appliquer ce qui précède à la fonction $e^{-\frac{1-x}{1+x}}$, dont les coefficients sont bornés.

Plutôt directement, la fonction f est prolongeable en -1 , et partout ailleurs (pour la bonne définition de $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ hein...)

▷ ?? □

Exercice 124 [ENS 2023 # 131] Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ à l'aide de la transformation de Laplace.

Démonstration. $f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ □

Exercice 125 [ENS 2023 # 132] Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \in [0, 1], 1 + ax + bx^2 \geq 0$.

1. Si $a \in \mathbb{R}_+$, montrer que $n \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. Si $a \in \mathbb{R}_-^*$, montrer que $n \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{a}$.

Démonstration. 1. Si $a > 0$, on peut minorer par $(1 + \frac{a}{2}x)^n$ sur un voisinage de taille de l'ordre $\frac{1}{n}$, et cela permet de conclure.

Si $a = 0$. Il faut faire un changement $u = \sqrt{nt}$, et convergence dominée.

2. Faire le changement de variable. □

Exercice 126 [ENS 2023 # 133] Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{e^{2x} \cos^2(t) + e^{-2x} \sin^2(t)}}$. Montrer qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq (ax + b)e^{-x}$.

Démonstration. Il suffit de chercher quand est-ce que les deux sommandes sont égaux, avec $\cos^2 = 1$ et $\sin^2(t) = t^2$, puis on majore chaque partie en retirant l'autre terme. Ça marche. □

Exercice 127 [ENS 2023 # 134] Pour x réel, on pose $J(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$.

- Calculer $J(0)$.
- Montrer que J est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Établir que $J(x) = O(x^{-1/2})$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration. • $J(0) = \pi$

• Trivial.

• Couper en $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\pi - \frac{1}{\sqrt{x}}$, forcer l'IPP, et majorer le $\frac{1}{\sin^2}$ par $\frac{1}{t^2}$. □

Exercice 128 [ENS 2023 # 135] Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f \star g: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x f(t)g(x-t)dt$. Montrer que $f \star g$ est dérivable et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 129 [ENS 2023 # 136] Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 1$ et $s < t$ dans $]0, 1[$, on pose $a_n(f, s, t) = \frac{2}{t-s} \int_s^t f(u) \cos\left(\frac{2n\pi}{t-s}(u-s)\right) du$.

- On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_1(f, s, t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0, 1[$.
- On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_n(f, s, t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Réciproquement, on suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ et $a_1(f, s, t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0, 1[$. Montrer que f est strictement convexe.

Démonstration. • On obtient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (f(t) - f(\pi - t) - f(\pi + 1) + f(2\pi - t)) dt$. Faire le dessin des quatre valeurs dans $[0, 2\pi]$, c'est la différence de deux différences (à même distance) de valeurs de f . Si on avait une FAF, on conclurait, mais sans, c'est une inégalité des pentes (avec des pentes intermédiaires).

- Découper.
- Quant $t \rightarrow s$, l'intégrale est équivalente à $f''(s)$. □

Exercice 130 [ENS 2023 # 137] Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^n y^{(k)} = 0$.

À quelle condition sur n tout élément de $\mathcal{S}$ possède-t-il une limite en $+\infty$?

Démonstration. Si et seulement si toutes les valeurs propres ont une partie réelle < 0 (puisque 0 n'est pas racine). □

Exercice 131 [ENS 2023 # 138] Soit I un (vrai) intervalle de $\mathbb{R}$. Si $r \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$, on pose $W_r(f_1, \dots, f_r) = \det \left(f_j^{(i-1)} \right)_{1 \leq i, j \leq r}$. Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$. Montrer que $W_r(gf_1, \dots, gf_r) = g^r W_r(f_1, \dots, f_r)$.
2. On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $W_k(f_1, \dots, f_k)$ ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ non nul, la fonction $a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ s'annule au plus $(r-1)$ fois sur I .
3. On suppose que $W_r(f_1, \dots, f_r)$ est identiquement nul sur I et que $W_{r-1}(f_1, \dots, f_{r-1})$ ne s'annule pas. Montrer que $(f_1, \dots, f_r)$ est liée.

Démonstration. 1.

2. Récurrence, factoriser par f_1 (qui par hypothèse ne s'annule pas).

3.

□

Exercice 132 [ENS 2023 # 139] On considère l'équation différentielle $(D_\lambda): y'' + (\lambda - r)y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, ou I un intervalle contenant $[0, 1]$. On considère E_λ l'espace des solutions y de (D_λ) telles que $y(0) = 0, y(1) = 0$.

1. Quelles sont les dimensions possibles de E_λ ?
2. On note y_λ la solution du problème de Cauchy (D_λ) , $y_\lambda(0) = 0, y'_\lambda(0) = 1$. Caractériser le cas où $\dim(E_\lambda) = 1$.
3. Montrer que, à r fixé, les E_λ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$.
4. On note N_λ le nombre de zéros de y_λ sur $[0, 1]$. Pourquoi est-il fini?
5. Calculer N_λ dans le cas $r = 0, \lambda > 0$.
6. Dans le cas général, étudier le comportement de N_λ .

Démonstration. 1. 0, 1 : c'est l'intersection de deux formes linéaires.

2.

3.

4.

5.

6. On veut une monotonie, et des limites. □

Exercice 133 [ENS 2023 # 140] Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E): x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$.

- Soit x une solution non nulle de (E) . Montrer que les zéros de x sont isolés.
- On suppose a de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe z de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$, et $q: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telles que $x \mapsto [t \mapsto x(t) e^{z(t)}]$ définisse une bijection de l'ensemble des solutions de (E) sur celui des solutions de $y'' + q(t)y = 0$.
- Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considère l'équation différentielle $(E_i): y'' + q_i(t)y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I . Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de y_1 . Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et m, M deux réels strictement positifs tels que $m \leq q \leq M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs d'une solution non nulle de $y'' + q(t)y = 0$. Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

Exercice 134 [ENS 2023 # 141] Soient A une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M l'unique application dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+, M'(t) = A(t)M(t)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \det(M(t)) = \exp \left(\int_0^t \text{Tr } A \right)$.

Démonstration. $g(t) = \det M(t)$, et différentielle du déterminant, en $H \mapsto \langle H, \text{Com } X \rangle$. Donc $g'(t) = \langle A(t)M(t), \text{Com } M(t) \rangle = \text{Tr}(A(t)) \det M(t)$. □

Exercice 135 [ENS 2023 # 142] # CRITÈRE DE STABILITÉ DE LYAPOUNOV, POUR L'ÉQUATION DE HILL Soit $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, π -périodique et telle que $\int_0^\pi p(t)dt \geq 0$ et $\int_0^\pi |p(t)|dt \leq \frac{\pi}{4}$. Montrer que l'équation $u'' + pu = 0$ n'admet pas de solution u non nulle sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, u(t + \pi) = \lambda u(t)$.

Démonstration. Remarque : l'application $u \mapsto u(\cdot + \pi)$ a une matrice de déterminant 1 (à cause du Wronskien). On veut savoir si elle admet une valeur propre réelle.

Si la solution u ne s'annule pas, on a $\int \frac{u''}{u} = \int p$, mais une IPP donne une contradiction avec la positivité.

Si la solution s'annule, les zéros sont isolés, on en considère deux consécutifs $a < b$, avec u positive, et on montre que $\int \left| \frac{u''}{u} \right| > \frac{4}{b-a}$.

Pour cela, on majore par $u_{\max}^{-1} \max |u'(x) - u'(y)|$, et on applique Rolle entre a et le max, et le max et b , puis IAG. $\square$

Exercice 136 [ENS 2023 # 143] Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A_0 + A_0^T) \subset \mathbb{R}_-$.

On admet l'existence d'une unique fonction $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(0) = A_0$ et $\forall t \geq 0$, $A'(t) = (A(t))^2 - (A(t)^T)^2$. Montrer que la fonction A a une limite en $+\infty$ et expliciter cette limite.

Démonstration. $A'(t)$ est antisymétrique, donc la partie symétrique de A est inchangée.

On écrit $A = S + U$, avec $S = A_0 + A_0^T$ et U est antisymétrique.

Alors $U' = SU + US + U^2 + US + SU - U^2 = 2(SU + US)$. C'est la dérivée de $e^{2tS}Ue^{2tS}$. $\square$

Exercice 137 [ENS 2023 # 144] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Décrire le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 138 [ENS 2023 # 145] On considère l'équation différentielle (1): $X'(t) = P(t)X(t)$ où P est une application continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Résoudre (1) si $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- On revient au cas général. Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ une période de P . On note $X_1, \dots, X_n$ une base de l'espace des solutions de (1) et, si $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$. Montrer qu'il existe $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $M(t+T) = M(t)C$.
- Avec les notations de la question précédente, montrer qu'il existe $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)e^{-tA}$ soit T -périodique.

Démonstration.

- Par inversibilité, il existe C tel que $M(T) = M(0)C$.
Puis on considère $Y(t) = M(t)C$, elle vérifie la même équation différentielle.
- Si et seulement si $M(t)Ce^{-(t+T)A} = M(t)e^{-tA}$, c'est-à-dire $Ce^{-TA} = I_n$
Le caractère inversible de A implique que C ne peut pas avoir 1 comme valeur propre, ce qui est faux pour $P = 0$.
Sans cette condition, c'est la surjectivité de l'exponentielle... $\square$

Exercice 139 [ENS 2023 # 146] • Soit $f: (x, y) \mapsto (\ln(x^2 + y^2), \arctan(\frac{y}{x}))$. Donner le domaine de définition Ω de f . Étudier la continuité et la différentiabilité de f .

- On identifie naturellement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Montrer que, si $(x, y) \in \Omega$, $df_{(x,y)}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire.

Démonstration. • $\Omega = \{(x, y) \mid x \neq 0\}$. La continuité et la différentiabilité ne posent pas de problème.

•

Exercice 140 [ENS 2023 # 147, 148] 1. Calculer $\sup_{a,b,c>1} (1 - \frac{1}{a})^b + (1 - \frac{1}{2b})^c + (1 - \frac{1}{3c})^a$.

2. Trouver $\sup_{a,b,c \geq 1} (1 - \frac{1}{a})^b (1 - \frac{1}{2b})^c (1 - \frac{1}{3c})^a$.

Démonstration. • C'est $\leq e^{-\frac{b}{a}} + e^{\frac{c}{2b}} + e^{\frac{a}{3c}}$, et cela s'en approche pour a, b, c très grand. Puis étudier cette quantité, en dérivant.

- C'est $\leq e^{-\frac{b}{a} - \frac{c}{2b} - \frac{a}{3c}}$, et cela s'en approche pour a, b, c très grand. Puis étudier la quantité dans l'exponentielle. $\square$

Exercice 141 [ENS 2023 # 149] Soient $q \in \mathbb{R}^+$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1\}$, Déterminer $\min_{(x,y) \in D} (x^q + y^q)$.

Exercice 142 [ENS 2023 # 150] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Déterminer les extrema de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

Exercice 143 [ENS 2023 # 151] Soient f une application différentiable convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$.
2. On suppose que l'application ∇f est L -lipschitzienne.

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq \frac{1}{L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.

Exercice 144 [ENS 2023 # 152] Soit $p > 1$. Montrer qu'il existe $K_p \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x|^p + |y|^p = 2$, on a $(x - y)^2 \leq K_p(4 - (x + y)^2)$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\frac{(x-y)^2}{K_p(4-(x+y)^2)^2}$ est majorée.

On sait que $\frac{|x|+|y|}{2} \leq \left(\frac{|x|^p+|y|^p}{2}\right)^{1/p} = 2$, donc le seul problème de définition est en $(x, y) = (1, 1)$, où il faut montrer que la fonction admet un prolongement par continuité.

Le dénominateur est $(x - y)^2 - 2(x - 1)^2 - 2(y - 1)^2 - 4(x - 1) - 4(y - 1)$. On pourrait poser $x' = x - 1$. $\square$

Exercice 145 [ENS 2023 # 153] Soient f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ telle que df_x soit injective. Montrer qu'il existe un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel f est injective.

Démonstration. Par l'absurde, on extrait deux suite $(x_n), (y_n)$ qui tendent vers x . Alors $f(x_n) = df_0(x_n) + o(x_n)$, idem pour y_n , et en posant $z_n = x_n - y_n$, on a $df(z_n) = o(z_n)$. Ce qui n'est pas possible car $\|df(\dots)\|$ est une norme. $\square$

Exercice 146 [ENS 2023 # 154] On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 et telle que $\Delta f = 0$. Montrer que $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) dt$.

Démonstration. Différencier $\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) dt$. $\square$

Exercice 147 [ENS 2023 # 155] On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique et on note B unité fermée de cet espace. Soient f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(u, v) \in B^2$, $\| -f(0) + v - df_u(v) \| \leq \frac{1}{2}$. Montrer que f s'annule exactement une fois sur B .

Démonstration. La fonction $g = \text{Id} - f$ vérifie $\|dg_u(v) - g(0)\| \leq \frac{1}{2}$. En intégrant, on obtient $\|g(x)\| \leq \frac{1}{2}$ sur B .

Cela justifie que $\|f\|$ admet un minimum dans l'intérieur de la boule. L'inégalité de l'énoncé donne df_u inversible, donc le minimum ne peut être atteint qu'en un point où f s'annule.

Si f s'annule en deux points x_1 et x_2 , la fonction g a deux points fixes, mais sa différentielle est de norme $\leq \frac{1}{2} + \|f(0)\|$, avec par ailleurs $\|f(0)\| \leq \frac{1}{2}$. Donc il faudrait que $\|f(0)\| = \frac{1}{2}$, et que le long du chemin entre x_1 et x_2 , on ait $dg_{\dots}(x_2 - x_1)$ parallèle (de même sens) à $f(0)$, donc $x_2 - x_1$ est également parallèle à $f(0)$.

Mieux : On a $\|f(0)\| = \frac{1}{2}$ et $\|dg_u(v) - f(0)\| \leq \frac{1}{2}$, donc $\|dg_u(v)\|$ doit être nul : $f(v) = v + f(0)$. $\square$

3) Géométrie

Exercice 148 [ENS 2023 # 156] • Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta)$.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le terme de plus haut degré de T_n ? En déduire les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.
- Déterminer les triangles du plan euclidien dont les côtés ont des longueurs rationnelles et les angles sont des multiples rationnels de π .

Démonstration. •

- Si on complète le triangle en un triangle rectangle, et que l'on écrit deux fois pythagore, on obtient que le triangle rectangle est rationnel, (au moins le côté complété), donc que le cosinus de l'angle est rationnel. $\square$

Exercice 149 [ENS 2023 # 157] Soit G un groupe d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout point x , il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Montrer que G contient une translation autre que l'identité de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Vrai pour $G = O_2$, avec $x = \vec{0}$.

Les éléments de G sont de la forme $z \mapsto az + b$, ou $z \mapsto a\bar{z} + b$, avec $a \in \mathbb{U}$.

On considère G^+ (isométries affines qui préservent l'orientation), dont les éléments ont un unique point fixe. Si il existe deux éléments qui ne commutent pas dans G^+ , on s'en sort : conjuguer, puis multiplier par l'inverse. Par ailleurs, deux éléments commutent si et seulement si ils ont le même point fixe.

Si tous les éléments de G^+ ont le même point fixe, tout élément de G^- (qui a une droite de points fixes) doit préserver ce point, sinon on créerai d'autres éléments de G^+ avec un point fixe différent. $\square$

Exercice 150 [ENS 2023 # 158] Soit S le groupe (pour la composition) des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe de S vérifiant les conditions suivantes :

- si $g \in G$, $g(0)$ est nul ou de module supérieur ou égal à 1 ;
- l'ensemble des $b \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto z + b$ appartienne à G contient deux éléments $\mathbb{R}$ linéairement indépendants.

Montrer que l'ensemble $\{a \in \mathbb{U} \mid \exists b \in \mathbb{C}, z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

Démonstration. Sinon, il existe une suite (a_n) qui s'accumule. On peut supposer qu'elle s'accumule sur 1, puis on peut borner les (b_n) , puis extraire une suite convergence, donc elle est constante à partir d'un certain rang. Donc on a une infinité de $z \mapsto a_n z$, ce qui est impossible. $\square$

Exercice 151 [ENS 2023 # 159] Soit L la courbe du plan complexe d'équation $|z|^2 = \cos(2 \arg(z))$.

- Trouver une équation cartésienne réelle définissant L .
- En déduire une paramétrisation de $L \cap (\mathbb{R}^+)^2$ sous la forme $\{(x(r), y(r)), r \in [0, 1]\}$.
- s Montrer que la longueur de la courbe L entre le point $(0, 0)$ et le point $(x(r), y(r))$ s'écrit : $A(r) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
- s Montrer que A définit une bijection de $[-1, 1]$ dans un intervalle de la forme $[-w, w]$ ou $w > 0$.
- s On définit $B = A^{-1}$. Montrer que B vérifie une équation différentielle du second ordre.

Démonstration. • $x^2 + y^2 = \cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} - 1 = \frac{2}{\frac{x^2}{y^2} + 1} - 1 = \frac{2y^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$.

- En posant $r = x^2 + y^2$, on a $r^2 = r - 2x^2$, donc $x = \sqrt{\frac{r^2 - r}{2}}$, et $y = \sqrt{\frac{r^2 + r}{2}}$

Exercice 152 [ENS 2023 # 160] Soit (e_1, e_2) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $L = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ et on note $\text{coVol}(L) = |\det(e_1, e_2)|$.

- sV2 Pour $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, représenter L dans $\mathbb{R}^2$. Que représente géométriquement le covolume $\text{coVol}(L)$?
- Soit A un disque fermé de $\mathbb{R}^2$, d'aire strictement supérieure à $\text{coVol}(L)$. Montrer qu'il existe deux éléments distincts x et y de A tels que $x - y \in L$.
Indication : Les parallélogramme du réseau L découpent le disque A en un nombre fini de morceaux A_i . Considérer les translatés A'_i des A_i , déplacés dans le parallélogramme à l'origine de $\mathbb{R}^2$, appliquer l'hypothèse.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe dans $L \setminus \{0\}$ un élément ℓ tel que $\|\ell\| \leq \frac{2+\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\text{coVol}(L)}$.
- Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4.
 - ▷ En considérant $m = (p-1)!$, montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}$ tel que p divise $1 + \omega^2$.
 - ▷ En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$.

Démonstration.

•
•
•

▷
▷

4) Probabilités

Exercice 153 [ENS 2023 # 162] On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|A \cap \llbracket 1, n \rrbracket|}{n}$ existe. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu?

Démonstration. Non vide, stable par complémentaire, et stable par union dénombrable. On n'est pas stable par union dénombrable : toute partie est réunion dénombrable de singleton. □

Exercice 154 [ENS 2023 # 163] On pose, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $d(\sigma) = \sum_{k=1}^n |\sigma(k) - k|$ et on note, pour $p \in \mathbb{N}$, $q_{n,p} = |\{\sigma \in S_n, d(\sigma) = p\}|$. Montrer que, si $p \geq 2n$, alors $q_{n,p}$ est pair.

Démonstration. On procède par récurrence. Si $\sigma \neq \sigma^{-1}$, ils vont par paires. De même, par hypothèse de récurrence, si σ a au moins un point fixe, le cardinal est pair.

Reste les éléments vérifiant $\sigma = \sigma^{-1}$, sans point fixes, qui sont produits de transpositions. Par ailleurs, la condition $p \geq 2n$, implique que les transpositions ont des croisements.

On peut alors transformer $(i_1 i_2)(j_1 j_2)$ en $(i_1 j_2)(j_1 i_2)$, qui préserve la quantité donnée (faire le dessin), et faire la transformation réciproque. □

Exercice 155 [ENS 2023 # 164] Un derangement est une permutation $\sigma \in S_n$ sans point fixe. On note D_n le sous-ensemble de S_n formé des derangements. SUP

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur D_n . Calculer la probabilité que X soit une permutation paire.
Indications.
 - ▷ On donne la formule d'inversion de Pascal : si (a_n) et (b_n) sont deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.
 - ▷ On pourra calculer la différence du nombre d'éléments pairs et impairs de D_n .
- Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n . Calculer la probabilité de $(Y \in D_n)$ sachant que Y est paire.

Démonstration. • La différence du nombre d'éléments pairs et impairs est le déterminant de la matrice avec des 1 et des 0 sur la diagonale.

•

Exercice 156 [ENS 2023 # 165] Soient $m \geq 1$ et $r \geq 1$ deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement «le morphisme φ est surjectif».

Démonstration. Le faire pour $m = p$, puis lemme Chinois. □

Exercice 157 [ENS 2023 # 166] Deux joueurs A et B lancent une pièce truquée donnant pile avec une probabilité égale à $5/9$. Les règles de gain sont les suivantes : pile rapporte 5 euros et face 4 euros. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chacun des joueurs effectue $9n$ lancers indépendants ; on note A_n (resp. B_n) la variable aléatoire donnant le gain du joueur A (resp. B).

- Trouver la limite de $\mathbf{P}(A_n = B_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- Montrer que $\mathbf{P}(A_n \geq B_n) \geq \frac{1}{2}$.
- Vers quoi tend $\mathbf{P}(A_n < B_n)$?
- S Trouver un équivalent, quand $n \rightarrow +\infty$, de $\mathbf{P}(A_n = B_n)$.

Démonstration.

- C'est clair.
- Découle des questions précédentes.
- C'est $\sum_{k=0}^{9n} a_k^2 = \sum_{k=0}^{9n} a^{2k} b^{2(9n-k)} \binom{9n}{k} \binom{9n}{9n-k}$.

Pour calculer un équivalent de $\sum_{k=0}^{9n} \binom{9n}{k} \binom{9n}{9n-k}$ sans la formule de Van der Monde, on l'écrit comme $\int_0^{2\pi} (1 + e^{i\theta})^{9n} (1 + e^{-i\theta})^{9n}$, puis CVD. Avec un facteur q^2 , cela fonctionne également.

Pour trouver l'équivalent de $\sum \binom{n}{k}^2$: on trouve l'élément maximal, en $m = \frac{n}{2}$, on factorise par ça, puis ℓ termes à droite/à gauche, on a $\frac{(m-1)\dots(m-\ell)}{(m+1)\dots(m+\ell)}$. On prend le logarithme, on utilise $|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$. On obtient l'ordre de grandeur précis du terme, on peut sommer et comparer à une intégrale. $\square$

Exercice 158 [ENS 2023 # 167, 177] On joue à pile ou face avec une pièce pipée qui donne pile avec probabilité $p < \frac{1}{2}$. On lance la pièce $2n$ fois et on compte le nombre de «Piles». Déterminer l'entier n qui maximise la probabilité d'avoir compté au moins $n+1$ «Piles».

Démonstration. On écrit

$$P(S_{2(n+1)} \geq n+2) = P(S_{2n} \geq n+2) + P(S_{2n} = n+1)(1 - (1-p)^2) + P(S_{2n} = n)p^2 = P(S_{2n} \geq n+1) + P(S_{2n} = n)p^2 - P(S_{2n} = n+1)(1-p^2)$$

puis on compare ces deux, et on obtient $n \leq \frac{p}{1-2p}$. $\square$

Exercice 159 [ENS 2023 # 168] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1$, $\mathbf{E}(X^2) = 2$ et $\mathbf{E}(X^3) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{P}(X = 0)$?

Démonstration. On a $E(X)E(X^3) \geq E(X^2)^2$. En notant $e = P(X = 1)$, on a $E(X1_{X>1})E(X^31_{X>1}) \geq E(X^21_{X>1})^2$, donc $(*)$ $(1-e)(5-e) \geq (2-e)^2$, qui donne $e \leq \frac{1}{2}$.

Comme $E(X) = 1$, on doit avoir $P(X = 0) \geq \frac{1}{4}$, mais le cas d'égalité ne donne pas les bonnes valeurs : mais $E(X) = 1$, $E(X^2) = \frac{3}{2}$ et $E(X^3) = \frac{5}{2}$.

Si on suppose que $e = \frac{1}{2}$, on doit avoir égalité dans Cauchy-Schwarz qui donne $(*)$, donc X ne prend qu'une seule valeur > 1 . On peut prendre Y qui vaut 3 avec probabilité $\frac{1}{6}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$, et on a les bonnes valeurs (et c'est la seule façon).

On montre que l'on ne peut pas faire mieux.

Stratégie :

- On montre que si X prend 5 valeurs (avec des probabilités > 0), alors on peut toujours diminuer la probabilité que $P(X = 0)$.
- Si X prend 4 valeurs, le système de Van der Monde a une unique solution (pas forcément positive...). On montre que la valeur p_0 est minimale si les quatre valeurs sont 0, 1, 2, 3.

Comment ? En diminuant continûment une valeur sinon.

On sait que X doit prendre la valeur 0, car $E(X) = 1$ (non...). Si on suppose que X ne prend pas la valeur 1, alors $P(X = 0) \geq \frac{3}{8}$ (via $E(X^3) = 5$), qui est plus grand que le $\frac{1}{3}$ trouvé.

On note v_2, v_3 les autres valeurs. ($v_0 = 0, v_1 = 1$)

Les p_i vérifient $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & v_2^2 & v_3^2 \\ 0 & 1 & v_2^3 & v_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. On cherche la première ligne de V^{-1} . V^T est la matrice de Vandermonde,

qui à P associe $(P(0), P(1), P(v_2), P(v_3))$. On cherche la première colonne de son inverse, c'est-à-dire les coefficients du polynôme $\frac{(X-1)(X-v_2)(X-v_3)}{-v_2v_3} = 1 + X(-1 - \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3}) + X^2(\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_2v_3}) - \frac{1}{v_2v_3}X^3$ Puis, le coefficient en p_0 est le produit avec $(1 \ 1 \ 2 \ 5)$, donc $-\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3} + 2(\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_2v_3}) - \frac{5}{v_2v_3} = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} - \frac{3}{v_2v_3}$

On veut montrer qu'en diminuant v_3 , il diminue, mais c'est $\frac{1}{v_3}(1 - \frac{3}{v_2})$, donc c'est le cas si $v_2 > 3$. Autrement dit, si l'un des termes est ≥ 3 , on peut diminuer l'autre.

Il faudrait montrer que pour $v_2 = 2$, il y a toujours une solution positive.

Plutôt : on les diminue ensemble, la différentielle est : $-\frac{1}{(v_2)^2} - \frac{1}{(v_3)^2} + \frac{3}{v_2v_3^2} + \frac{3}{v_3v_2^2}$

Si $v_2 = 2$, on veut montrer qu'une solution n'est pas possible, sauf $v_3 = 3$. Pour cela, on différencie la seconde (troisième) coordonnée selon v_3 .

Le polynôme est $\frac{X(X-1)(X-v_3)}{2(2-v_3)} = \frac{X^3 - (1+v_3)X^2 + v_3X}{2(2-v_3)}$, sa troisième coordonnée est $-\frac{1+v_3}{2(2-v_3)}$, qui est décroissante, donc si on passe de $(\cdot, \cdot, 2, v_3)$ à $(\cdot, \cdot, 2, 3)$, la partie en 2 a augmenté, et a atteint 0, impossible !

Donc la seule solution avec un 2 est $(\cdot, \cdot, 2, 3)$. Puis si on a une solution où les deux termes sont ≥ 3 , on peut se ramener à $(\cdot, \cdot, 3, 4)$, puis $(\cdot, \cdot, 3, 3)$, qui existe bien. D'où le résultat. $\square$

Exercice 160 [ENS 2023 # 169] Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair ≥ 3 , $(X_m)_{m \geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $X_0 = 0$, et pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_{m+1} = k+1 \mid X_m = k) = \mathbf{P}(X_{m+1} = k-1 \mid X_m = k) = \frac{1}{2}$. Montrer que $(X_m)_{m \geq 0}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Démonstration. On regarde la loi de $X_m + m$, dont la série génératrice est $G_m = \left(\frac{1+X^2}{2}\right)^m$. Puis on regarde $P(S_m = 0[n])$, c'est $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} G_m(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1+e^{\frac{4ik\pi}{n}}}{2}\right)^m = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{2m} \frac{2k\pi}{n}$

Pour les autres valeurs que 0 modulo n , il faut prendre $X^k G_m(X)$, cela marche pareil. $\square$

Exercice 161 [ENS 2023 # 170] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ c'est-à-dire le nombre de couples (i, j) avec $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- Montrer que $P_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X^{I(\sigma)} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + X + \dots + X^k)$.
- On pose $f(n) = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n \text{ t.q. } (n+1) \mid I(\sigma)\}|$. Exprimer $f(n)$ à l'aide de P_n .
- Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$ et de même une infinité de nombres premiers p tels que $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$.

Démonstration. • σ est déterminé par : le nombre d'inversion avec $(n-1)$ (une ou 0), le nombre d'inversions avec $n-2$, etc. En effet, pour chaque σ , on peut donner ces nombres, et réciproquement, si on les connaît, on connaît l'image de $(n-1)$ par rapport à l'image de n , puis l'image de $n-2$ par rapport à $(n-1)$ et n , etc, donc σ est entièrement déterminée.

- $f(n)$ est la somme des coefficients en $X^{k(n+1)}$ de P_n , donc $\frac{P(1)+P(\omega)+\dots+P(\omega^n)}{n+1}$.
- Avec les questions précédentes, on trouve $f(p-1) = \frac{1}{p} \left((p-1)! + \sum_{\omega \in \mathbb{U}_p \setminus 1} \frac{p}{(1-\omega)^p} \right)$, en utilisant $1 + X + \dots + X^{k-1} = \frac{1-X^k}{1-X}$.

Par ailleurs, $(1+\omega)^p = 2^p \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^p e^{i\frac{p\theta}{2}}$, la partie en $e^{i\dots}$ valant ± 1 .

La somme porte donc sur $p-1$ éléments, qui parcourent le demi-cercle supérieur. Comme p est impair, les signes à droite et à gauche sont les mêmes (car le ± 1 alterne, un nombre impair de fois, et le cos change de signe).

Comme $p-1$ est pair, il n'y a pas de terme au milieu. Une fois regroupé sur le quadrant en haut à droite, la somme est alternée. Son signe est donnée par la parité de $\frac{p-1}{2}$. $\square$

Exercice 162 [ENS 2023 # 171] Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, P une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{F}_p[X]$, N le nombre de racines de P dans $\mathbb{F}_p$ (sans tenir compte des multiplicités). Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

Démonstration. On a $N = \sum_i \mathbb{1}_{i \text{ rac.}}$ $\square$

Exercice 163 [ENS 2023 # 172] Dans tout l'exercice, les variables aléatoires considérées sont supposées réelles, discrètes et à loi de support fini. Pour deux telles variables X et Y , on note $X \leq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Soient X une variable aléatoire vérifiant les conditions de l'exercice et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(f(X))$.
2. Donner un exemple de couple (X, Y) pour lequel $X \leq_c Y$ mais $X \neq Y$.
3. Montrer que si $X \leq_c Y$ alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) \leq \mathbf{V}(Y)$.
4. Montrer que $X \leq_c Y$ si et seulement si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq x) dx \leq \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geq x) dx.$$

5. Montrer que $X + \mathbf{E}(X) \leq 2X$.

Démonstration. 1. Convexité

2. Prendre $X = 1$ et $Y = \mathcal{U}(\{0, 2\})$.
3. Prendre $f = \text{Id}$ et $g = -\text{Id}$.
4. On a $\int_a^\infty \mathbf{P}(X \geq x) dx = (x_i - a)p_i + \dots + (x_n - a)p_n$, où la somme porte sur les $x_j > a$.

La fonction $a \mapsto \int_a^\infty$ est décroissante, affine par morceaux, nulle en $+\infty$, et de pente -1 en $-\infty$. Par ailleurs, la condition $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ est équivalente à l'égalité des fonctions en $-\infty$.

La quantité $(x_i - a)p_i + \dots + (x_n - a)p_n$ est l'espérance pour $f(x) = (x - a)_+$. donc si $X \leq_c Y$, l'inégalité est bien vérifiée. Réciproquement, si elle est vérifiée, alors $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ est vérifiée pour la fonction Id , et $-\text{Id}$ (grâce à l'espérance), puis pour toutes les fonctions convexes affines par morceaux.

Si f est une fonction convexe quelconque, on se débrouille. $\square$

Exercice 164 [ENS 2023 # 173] On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable $u_1 \in \llbracket 1, N \rrbracket$, puis $u_2 \in \llbracket 1, u_1 - 1 \rrbracket$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $u_\ell = 1$ avec nécessairement $\ell \leq N$. On note $E_N = \{u_j, 1 \leq j \leq \ell\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}(k \in E_N)$ pour $1 \leq k \leq N$.
2. Calculer $\mathbf{P}(2 \in E_N \mid 3 \notin E_N)$.
3. Calculer $\mathbf{E}(|E_N|)$ et $\mathbf{V}(|E_N|)$.

Démonstration. 1. $P(k \in E_{k+1}) = \frac{1}{k}$, puis $P(k \in E_n) = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}(P(k \in E_{n-1}) + \dots + P(k \in E_{k+1}))$. On trouve $P(k \in E_N) = \frac{1}{k}$.
 2. On a $P(2 \in E_N \mid 3 \in E_N) = \frac{1}{2}$.
 3. Semble facile. □

Exercice 165 [ENS 2023 # 174] Dans tout l'énoncé, on fixe un entier $p \geq 1$.

- Développer $(x_1 + \dots + x_N)^p$ pour toute liste $(x_1, \dots, x_N)$ de nombres réels.
- Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$. Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq (2p)^p (\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq p^p (\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = 1$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $Y_x = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) X_i$. Montrer que $\omega \mapsto \int_0^{2\pi} Y_x(\omega)^{2p} dx$ prend au moins une valeur inférieure ou égal à $2\pi p^p$.

Démonstration. •

- Si on développe, seuls les termes d'exposants tous pairs restent. On veut alors

$$\sum_{n_1 + \dots + n_n = p} \binom{2p}{2n_1, \dots, 2n_n} a_1^{2n_1} \dots a_n^{2n_n} \leq (2p)^p \sum_{n_1 + \dots + n_n = p} \binom{n}{n_1, \dots, n_n} a_1^{2n_1} \dots a_n^{2n_n}.$$

Il suffit de le montrer pour chaque multinôme.

Pour $n = 2$: On veut montrer que $\binom{2p}{2k} \leq (2p)^p \binom{p}{k}$, c'est-à-dire $\frac{(2p) \dots (2p-2k+1)}{(2k)!} \leq (2p)^p \frac{(p) \dots (p-k+1)}{k!}$. Ce qui se fait assez bien : on majore les premiers facteurs par $2p$, et s'il en restent, par le reste, ce qui est possible car $2k - p \leq k$.

La même démonstration marche assez bien dans le cas général.

- Pour $n = 2$: on veut $\frac{(2p) \dots (2p-2k+1)}{(2k)!} \leq (p)^p \frac{(p) \dots (p-k+1)}{k!}$, cela revient à $\frac{(2p) \dots (2p-2k+1)}{(p) \dots (p-k+1)} \frac{k!}{(2k)!} \leq p^p$, et en groupant les termes avec le prochain, on obtient $\frac{(2p)(2p-1)}{(2k)(2k-1)} k = \frac{p(2p-1)}{2k-1} \leq p$, d'où la conclusion. J'imagine que ça marche aussi en général.
- Pas de difficulté. □

Exercice 166 [ENS 2023 # 175] suivant la loi uniforme sur $\{1, -1\}$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher, et $a_1, \dots, a_n$ des réels. On pose $Y = \sum_{k=1}^n a_k X_k$.

1. Montrer que $\mathbf{E}(|Y|)^2 \leq \mathbf{E}(Y^2)$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(Y^2) = \sum_{k=1}^n a_k^2$.
3. On suppose que $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$. En considérant la variable complexe $Z = \prod_{k=1}^n (1 + iX_k)$, montrer que $\mathbf{E}(Y^2) \leq e \mathbf{E}(|Y|)^2$.
4. Montrer que $\mathbf{E}(Y^2) \leq e \mathbf{E}(|Y|)^2$ en toute généralité.

Démonstration. 1.

- 2.
3. La variable G vérifie $|G|^2 = \prod (1 + a_k^2) \leq e \sum a_k^2 = e$, et l'espérance de YG vaut 1. □

Exercice 167 [ENS 2023 # 176] Une variable aléatoire discrète réelle X est dite décomposable s'il existe deux variables aléatoires discrètes réelles non presque sûrement constantes et indépendantes X_1 et X_2 telles que $X \sim X_1 + X_2$.

- Une variable aléatoire de Bernoulli est-elle décomposable ? Une variable aléatoire binomiale est-elle décomposable ?
- Montrer que le polynôme $T^4 + 2T + 1$ ne peut se factoriser comme produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{R}^+$. En déduire une variable aléatoire réelle discrète décomposable X telle que X^2 ne soit pas décomposable.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, n-1]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que X soit décomposable.

Démonstration. 1. Bernoulli : non, cf l'image. Binomiale : oui, prendre $\mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}(n-1, p) + \mathcal{B}(p)$.

2. Prendre $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$, qui est décomposable, et X^2 a comme fonction génératrice le polynôme donné. Si $X^2 = A + B$, alors $\min A + \min B = 0$, quitte à ajouter/retirer une constante, on peut supposer que $\min A = \min B = 0$. Alors comme X est à valeurs entières, A et B également, donc elles sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, et ont des fonctions génératrices.
3. $G(t) = 1 + \dots + t^{n-1}$. Si n n'est pas premier, on peut factoriser simplement G par $(1+t+t^{d-1})$ fois un polynôme à coefficients positifs. Si n est premier, le polynôme est irréductible. □

Exercice 168 [ENS 2023 # 178] On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $X = [1, n]$. Soient A et B des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X .

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $|A|$ (cardinal de A).
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|A| \geq (\frac{1}{2} + \varepsilon)n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. Pour $i \in [1, n]$, on note $\mathbf{1}_{\{i\}}$ la fonction indicatrice du singleton $\{i\}$. Déterminer la loi de $\mathbf{1}_{\{i\}}(A)$.
4. Calculer $\mathbf{P}(A \subset B)$. Commenter.

Exercice 169 [ENS 2023 # 179] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On considère un échiquier $n \times n$. On colorie chaque case en rouge (resp. en bleu) avec probabilité p (resp. $1 - p$). On note $Q(p)$ la probabilité pour qu'il existe un chemin joignant le bord gauche au bord droit constitué uniquement de cases rouges (les déplacements ne se font pas en diagonale)? Que dire de la fonction Q ?

Exercice 170 [ENS 2023 # 180] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour $n \geq 1$.

- Calculer l'espérance du nombre R de retour en zéro de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$. Montrer que la probabilité qu'il existe $n \geq 1$ tel que $S_n \notin I$ est égale à 1.
- Montrer que l'évènement $(R = +\infty)$ est presque sûr.

Démonstration. • C'est simple : on connaît la probabilité d'être en 0 à l'instant n .

- C'est de la ruine du joueur.
- Découle de ce qui précède.

□

Exercice 171 [ENS 2023 # 181] Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs de somme 1. On considère un arbre aléatoire sur cet espace tel que chaque noeud ait un nombre aléatoire X de successeurs avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = m_k$. Ces variables aléatoires correspondant au nombre de successeurs sont mutuellement indépendantes. On note X_1 la variable aléatoire comptant le nombre de successeurs de la racine. Caractériser le fait que la hauteur de l'arbre soit presque sûrement finie.

Démonstration. C'est la probabilité d'extinction.

□

Exercice 172 [ENS 2023 # 182] On construit itérativement et aléatoirement un arbre aléatoire sur l'ensemble de sommets $\llbracket 1, n \rrbracket$ (graphe orienté) selon le procédé suivant : à l'étape k , on choisit aléatoirement un point dans $\llbracket 1, k \rrbracket$ (avec probabilité uniforme) et on rajoute une arête orientée de ce point vers $k + 1$. Ces choix s'effectuent de manière indépendante les uns des autres.

- On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre d'arêtes partant du point 1. Déterminer l'espérance et la variance de X_n .
- On suppose $n \geq 2$. On note S_n la variable aléatoire donnant le nombre de descendants (directs ou non) du sommet 2. Déterminer la loi de S_n .
- Calculer l'espérance du nombre de feuilles de l'arbre.

Démonstration. 1. H_n , c'est simple.

$$2. P(S_n = 0) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{n-2}{n-1} = \frac{1}{n-1}.$$

$$P(S_n = 1) = \sum_{i=3}^n \frac{1}{i-1} \frac{1}{i-2} \frac{i-1}{n-1} = \sum_{i=3}^n \frac{1}{(i-1)^2} \frac{1}{i-2} = \frac{1}{(n-1)^2} H_{n-2}$$

$$P(S_n = 2) = \sum_{3 \leq i < j} \frac{1}{i-1} \frac{1}{j-1} \prod_{2 < k < i} \frac{k-2}{k-1} \prod_{i < k < j} \frac{k-3}{k-1} \prod_{j < k < n} \frac{k-3}{k-1} + \sum_{i < j} \frac{1}{i-1} \frac{1}{j-1} \prod_{2 < k < i} \frac{k-2}{k-1} \prod_{i < k < j} \frac{k-3}{k-1} \prod_{j < k < n} \frac{k-3}{k-1} = 2 \frac{1}{(n-1)^2} H_{n-2}^2$$

3. La probabilité que k soit une feuille est la probabilité qu'il n'ait pas de descendants, donc $P(S_n^k = 0) = \frac{k-1}{n-1}$.

□

Exercice 173 [ENS 2023 # 183] Soient E un ensemble fini, $V: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une fonction de E vers les parties de E et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Un point $a \in E$ est un minimum local si $f(a) \leq f(b)$ pour tout $b \in V(a)$. Soit M un entier tel que $M \geq \sqrt{|E|}$. Soient $b_1, \dots, b_M$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans E . Soit k tel que $f(b_k) = \min_{1 \leq i \leq M} f(b_i)$. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de E telle que $u_0 = b_k$ et, pour tout $n \geq 0$:

- si u_n est un minimum local, alors $u_{n+1} = u_n$;
- sinon $u_{n+1} \in V(u_n)$ et $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.

Montrer que u_M est un minimum local avec probabilité au moins $1/2$.

Démonstration. La donnée est celle d'un graphe. Étant donné l'algorithme, on peut retirer des arêtes, de sorte que les voisins de a vérifient $f(b) < f(a)$. Auquel cas il n'y a plus de cycles.

Alors on choisit aléatoirement $\sqrt{n}$ sommets du graphe, et parmi ceux-ci le sommet de valeur minimale. On veut montrer que la plus longue chaîne décroissante à partir de celui-ci est de longueur $\leq \sqrt{n}$ avec probabilité $\geq \frac{1}{2}$.

On peut attribuer à chaque sommet sa valeur par f , et on peut supposer que c'est injectif.

Puis on peut ajouter des arêtes, vers ceux qui sont $< s$. Puis on peut retirer les arêtes, sauf celle juste en dessous. On est ramené à traiter le cas du graphe $n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow 1$.

□

Exercice 174 [ENS 2023 # 184] Une variable aléatoire réelle X est infiniment divisible si X admet un moment d'ordre 2, et si, pour tout $n \geq 2$, il existe $(X_{i,n})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ i.i.d. et admettant des moments d'ordre 2 telles que $X \sim \sum_{i=1}^n X_{i,n}$. Montrer que si X est bornée et infiniment divisible, alors X est presque sûrement constante.

Démonstration. Si X est bornée par b , $|X_{i,n}| \leq \frac{b}{n}$, donc $V(X_{i,n}) \leq \frac{C}{n^2}$.

□

Exercice 175 [ENS 2023 # 185] On se donne une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $i \geq 1$, il existe $a_i \in]0, 2]$ et $p_i \in [0, 1]$ tels que X_i soit à valeurs dans $\{0, a_i, -a_i\}$ et $\mathbf{P}(X_i = a_i) = \mathbf{P}(X_i = -a_i) = \frac{p_i}{2}$.

- Quelle relation doivent vérifier a_i et p_i pour que $\mathbf{V}(X_i) = 1$?
- E Dans toute la suite, on suppose cette relation vérifiée et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- Calculer la variance de $n^{-1/2}S_n$.
- Montrer que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tS_n)) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tX_i))$.
- En déduire que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tS_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t^2/2}$.

Démonstration. •

- Vaut 1.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- On a $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tX_i)) = \mathbf{E}\left(1 - \frac{t^2}{2n}X_i^2\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ □

Exercice 176 [ENS 2023 # 186] On fixe un entier $n \geq 1$. On considère la relation d'ordre partielle $\preceq$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $x \preceq y \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \leq y_i$. Une fonction $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite croissante lorsque $f(x) \leq f(y)$ quels que soient x, y dans $\{0, 1\}^n$ tels que $x \preceq y$.

- Donner un exemple de fonction croissante non constante de $\{0, 1\}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Dans la suite, on se donne une liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires i.i.d. suivant $\mathcal{B}(1/2)$.
- Soit $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. On suppose $n \geq 2$. Montrer que

$$\mathbf{E}(f(X_1, \dots, X_n)) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}(f(X_1, \dots, X_{n-1}, 0)) + \mathbf{E}(f(X_1, \dots, X_{n-1}, 1)) \right).$$

- Soit $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes.
Montrer que

$$\mathbf{E}((fg)(X_1, \dots, X_n)) \geq \mathbf{E}(f(X_1, \dots, X_n)) \mathbf{E}(g(X_1, \dots, X_n)).$$

Démonstration. • La somme des termes...

- Pas de difficulté.
- C'est une récurrence avec ce qui précède. On a fondamentalement uniquement besoin d'une inégalité de Tchebychev, à 2 termes. □

Exercice 177 [ENS 2023 # 187] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit S_n de la distribution uniforme de probabilité. On note $A_i = \{\sigma \in S_n, \sigma(i) = i\}$ et N la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation.

- Soit $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.
- Exprimer N avec des indicatrices. Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.
- Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $F \subset \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, |I|=k} \prod_{i \in I} \mathbf{1}_F(i)$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\mathbf{E}(N(N-1) \cdots (N-k+1))$.
- Soient $X \sim \mathcal{P}(1)$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1) \cdots (X-k+1))$.
- Calculer $\mathbf{P}(N=0)$.

Exercice 178 [ENS 2023 # 188] On considère une suite i.i.d. $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires suivant toutes la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. On définit $(S_n)_{n \geq 0}$ par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geq \varepsilon n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- On considère la variable aléatoire $T_n: \omega \mapsto \min\{k \in \mathbb{N}, S_k(\omega) \geq n\}$. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n .
- Soit $k \geq 2$. Montrer que $\mathbf{P}(T_n = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-2} = k-1)$.
- Calculer l'espérance de T_n .

Exercice 179 [ENS 2023 # 189] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leq i \leq d\}$, où e_i désigne l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i -ème, égale à $\bar{1}$. Soient enfin $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque et X une variable aléatoire uniformément distribuée sur G .

Montrer que $\mathbf{E}(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|) \leq \frac{nd}{2} \max_{s \in S} \mathbf{E}(|f(X) - f(X+s)|)$.

Démonstration. C'est simple : On peut passer d'une somme à un autre en au plus $\frac{nd}{2}$ pas. □

II) X

XENS

1) Algèbre

Exercice 180 [X MP 2023 # 275] On note $p(n)$ le nombre de partitions de n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $p(n) \leq 2^{n-1}$. SUP

Démonstration. On a $p(n) \leq p(n-1) + p(n-2) + \cdots + p(1) + 1$, en considérant le (un) plus grand élément de la partition. Formellement, on a une surjection $\sqcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_k \rightarrow \mathcal{P}_n$ $(X, k) \mapsto X + (n-k)$. □

Exercice 181 [X MP 2023 # 276] Soient $e_r > \cdots > e_2 > e_1 \geq 0$ des entiers, $n = \sum_{k=1}^r 2^{e_k}$ et $X = \{s \in \mathbb{N}; 2^s \mid n!\}$. SUP

- Montrer que $\max X = n - r$.
- Montrer que le nombre d'entiers k tels que $\binom{n}{k}$ est impair est 2^r .

Démonstration. • Formule de Legendre.

- Il faut que quand $n_i = 0$, $k_i = 0$ (chiffres en base 2).

Avec Q1, on veut que le nombre de uns dans la décomposition de n soit la somme du nombre de uns de k et de $n - k$.

Quand on fait la somme de deux nombres en binaires, le nombre de uns du résultat est $\leq$ à la somme des nombres de uns des sommandes. Avec égalité si et seulement si il n'y a aucune retenue (chaque retenue fait perdre un un).

Donc forcément, il faut que là où k a un chiffre 1, n l'ait également. □

Exercice 182 [X MP 2023 # 277] • Montrer que l'équation $a^2 - 2b^2 = 1$ admet une infinité de solutions $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

Déterminer l'ensemble des solutions.

- Que dire de l'ensemble des solutions de $a^2 - 2b^2 = -1$?

Démonstration. • $(3 + 2\sqrt{2})^k$

- $(1 + \sqrt{2})^{2k+1}$ □

Exercice 183 [X MP 2023 # 278] Si G est un groupe, les éléments d'ordre fini de G forment-ils un sous-groupe ?

Démonstration. Non : cf le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: l'ensemble des mots sur $\{A, B\}$ où deux A d'affilée, ou deux B d'affilées se simplifient, muni de la concaténation. Cf # 281 □

Exercice 184 [X MP 2023 # 279] • Trouver deux groupes G_1 et G_2 non isomorphes de cardinal $2023 = 7 \times 17^2$.

- Soit p premier. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

- Soient G, H deux groupes finis et $\psi: G \rightarrow H$ un morphisme surjectif.

Montrer que $|G| = |H| \times |\text{Ker } \psi|$.

- On suppose que G est un groupe de cardinal 2023, que $H = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et que $\varphi: G \rightarrow H$ est un morphisme surjectif. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \text{Ker } \varphi$.

- Montrer que tout groupe de cardinal 2023 est isomorphe à G_1 ou G_2 .

Démonstration. •

- Le centre est non trivial : on regarde l'action de G sur lui-même par conjugaison, les éléments du centre ont une orbite restreinte à eux mêmes. Sinon, tout élément est conjugué à un nombre d'éléments multiple de p , $\Phi: g \mapsto gxg^{-1}$ est un morphisme de groupe, donc son noyau est un sous-groupe, donc de cardinal 1, p, p^2 , donc son image est de cardinal 1, p, p^2 .

La somme des cardinaux des orbites fait p^2 , donc le nombre d'orbite de cardinal p est un multiple de p .

Soit G est commutatif, auquel cas soit G est cyclique, soit il admet deux éléments h, g d'ordre p , tel que $\langle g \rangle \neq \langle h \rangle$. Alors $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, via $(i, j) \mapsto h^i g^j$ (injective + cardinal).

Sinon, le centre de G est de cardinal p engendré par g . On prend un élément h qui n'est pas dans le centre, $(i, j) \mapsto g^i h^j$ est injectif.

- On peut écrire G comme la réunion de $g_1 \text{Ker } \varphi, \dots, g_7 \text{Ker } \varphi$.

On a $g_1 n_1 g_2 n_2 = g_1 g_2 g_2^{-1} n_1 g_2 n_2$. On veut montrer que la conjugaison de N par g_2 est triviale, ce qui vient du fait qu'en conjuguant 7 fois de suite, on est sensé faire l'identité, et $k \mapsto (n_1 \mapsto g_2^{-k} n_1 g_2)$ est un morphisme, et N n'a pas d'automorphisme d'ordre 7.

$\text{Ker } \varphi$ est un sous-groupe normal de G . Tout élément de g donne, par conjugaison, un automorphisme de $\text{Ker } \varphi$, qui ne dépend que de la classe de g modulo $\text{Ker } \varphi$ (car $\text{Ker } \varphi$ est commutatif).

On a un morphisme $H \rightarrow \text{Aut}(\text{Ker } \varphi)$, qui est forcément trivial, donc $(g_1, n_1) \mapsto g_1 n_1$ est un morphisme. □

Exercice 185 [X MP 2023 # 280] Soit G un groupe fini de neutre 1. Soit φ un automorphisme de G sans point fixe c'est-à-dire tel que : $\forall x \in G, \varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$. On note n l'ordre de φ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \text{id}$.

- Montrer que $\forall x \in G, x \varphi(x) \varphi^2(x) \dots \varphi^{n-1}(x) = 1$.
- Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe G ? Donner un exemple.
- Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ commutent.

Démonstration. • Il est fixe.

- $x = x^{-1}$.

- On a $x \varphi(x) \varphi^2(x) = 1$, et $x \varphi(x)$ est l'inverse de $\varphi^2(x)$, mais on a de même $\varphi^2(x) \varphi(x) x = 1$. □

Exercice 186 [X MP 2023 # 281] Soient G un groupe et T l'ensemble des éléments de G d'ordre fini.

- En général, T est-il un sous-groupe de G ?
- Soit S une partie finie de G stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leq$. Montrer que, pour tous $s_1, \dots, s_r \in S$, il existe $s'_1, \dots, s'_r \in S$ tels que $s'_1 \leq s'_2 \leq \dots \leq s'_r$ et $s_1 s_2 \dots s_r = s'_1 s'_2 \dots s'_r$.
- Avec la question précédente, montrer que, si T est fini, alors T est un sous-groupe de G .

Démonstration. • Non : cf le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: l'ensemble des mots sur $\{A, B\}$ où deux A d'affilée se simplifient, munit de la concaténation.

- Pour deux éléments : on peut écrire $s_1 s_2 = s_2 (s_2^{-1} s_1 s_2)$: on a mis le second en premier. On peut recommencer tant que le premier est plus grand, on obtient une suite strictement décroissante, qui s'arrête car S fini.

Puis récurrence sympa.

- Si T est fini, si $ab \notin T$, alors on obtient une infinité de puissances, qui sont distinctes, mais d'après la question précédente, elle s'écrivent comme un produit croissant, qui n'a qu'un nombre fini de possibilités. $\square$

Exercice 187 [X MP 2023 # 282] • Soit $s: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ $t \mapsto t^{-1}$. Déterminer le groupe engendré par s .

- On définit les applications $s_1: (t, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto (t^{-1}, tu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et $s_2: (t, u) \mapsto (tu, u^{-1})$. Montrer que le sous-groupe qu'elles engendrent est isomorphe à S_3 .
 - Retrouver le résultat de la question précédente en considérant le quotient A de $(\mathbb{R}^*)^3$ par la relation de colinéarité, la bijection $f: A \rightarrow (\mathbb{R}^*)^2$ qui associe à la classe de (x_1, x_2, x_3) le couple $(x_1/x_2, x_2/x_3)$, et enfin les permutations de A induites par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1, x_3)$ et $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2)$.
 - Soit $n \geq 3$. Déterminer le groupe engendré par les bijections $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $(\mathbb{R}^*)^n$ définies par $s_i(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{i-2}, t_{i-1} \times t_i, t_i^{-1}, t_i \times t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n)$ si $1 < i < n$, $s_1(t_1, \dots, t_n) = (t_1^{-1}, t_1 \times t_2, t_3, \dots, t_n)$ et $s_n(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1} \times t_n, t_n^{-1})$.
- Ind. Considérer $f: (\mathbb{R}^*)^{n+1} \rightarrow (\mathbb{R}^*)^n$ définie par $f(t_1, \dots, t_{n+1}) = \left(\frac{t_2}{t_1}, \dots, \frac{t_{n+1}}{t_n}\right)$ et chercher des bijections simples s'_i de $(\mathbb{R}^*)^{n+1}$ telles que $s_i \circ f = f \circ s'_i$.

Démonstration. • $\square$

Exercice 188 [X MP 2023 # 283] Soit G un groupe fini d'ordre n . On note, pour tout diviseur positif d de n , $n_d(G)$ le nombre d'éléments de G d'ordre d .

- Montrer que $n = \sum_{d|n} n_d(G)$.
- Calculer les $n_d(G)$ lorsque G est cyclique.
- Montrer que, si pour tout diviseur positif d de n , $|\{x \in G, x^d = 1\}| \leq d$, alors G est cyclique.
- Soient $\mathbb{K}$ un corps et G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 189 [X MP 2023 # 284] On pose $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
- Déterminer les éléments de $\mathbb{Q}[i] \setminus \{0\}$ qui sont d'ordre fini.

Exercice 190 [X MP 2023 # 285] • Soient $\mathbb{K}$ un corps, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $P = X^2 - aX - b$. On considère la $\mathbb{K}$ -algèbre A admettant une base sur $\mathbb{K}$ de la forme $(1, x)$ avec $x^2 = ax + b$. À quelle condition cette algèbre est-elle un corps?

- On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ ou p est un nombre premier. Combien de $\mathbb{F}_p$ -algèbres non isomorphes peut-on obtenir ainsi?

Démonstration. • À condition que P soit irréductible.

- Si c'est un corps : $(x - a/2)^2 = c$ on obtient x' avec $x'^2 = c$, avec c n'est pas un carré, et il y a une unique classe de non carré. Si c'est pas un corps, $x^2 = 1$, l'algèbre est isomorphe à $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$. $\square$

Exercice 191 [X MP 2023 # 286] Soit p un nombre premier. On suppose que, pour toute $\mathbb{F}_p$ -algèbre A , il existe un endomorphisme u_A de A de sorte que, pour tout couple (A, B) de $\mathbb{F}_p$ -algèbres et tout morphisme τ de $\mathbb{F}_p$ -algèbres de A dans B , on ait $\tau \circ u_A = u_B \circ \tau$. Que dire des u_A ?

Démonstration. On prend $A = {}_p[X]$, τ_A l'endomorphisme dedans. En prenant $A = B$, u_A doit commuter avec tout morphisme d'algèbre $P \mapsto P(Q(X))$, donc $u_A(P(X)) = P(u_A(X))$, donc u_A est défini par $u_A(X)$, et $u_A: P \mapsto P \circ Q_A$.

Par suite, pour tout B , $u_B: b \mapsto Q_A(b)$ $\square$

Exercice 192 [X MP 2023 # 287] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

SUP

Montrer que $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k = 2^{n-1} P_n \left(\frac{X+1}{2}\right)$.

Démonstration. Revient à l'identité $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=p+1}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{n}{p}$, qui peut se démontrer par des récurrence, en appliquant successivement la formule de Pascal. Faire le dessin.

Interprétation probabiliste : on divise par 2, à gauche, on a la probabilité de tirer une partie de taille $> p$. À droite, si on imagine des tirages pile/face successif, c'est la probabilité d'obtenir le $p+1$ -ème élément au rang $k+1$ exactement. $\square$

Exercice 193 [X MP 2023 # 288] • Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $S_n \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_n(N) = \sum_{k=0}^{N-1} k^n$. Dans la suite, on note b_n le coefficient de S_n devant X .

- Donner une relation de récurrence exprimant b_n en fonction de $b_0, \dots, b_{n-1}$.
- Pour $n \geq 1$, donner une relation entre S_n'' et S_{n-1}' .
- En déduire une expression explicite des coefficients de S_n en fonction de $b_0, \dots, b_n$.

Exercice 194 [X MP 2023 # 289] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$.

SUP

On pose $F: z \in \mathbb{C}^* \mapsto \prod_{k=1}^n (1 + q^{2k-1}z)(1 + q^{2k-1}z^{-1})$.

- Montrer qu'il existe une unique liste $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, F(z) = \sum_{k=0}^n c_k (z^k + z^{-k})$$

- Donner une relation de récurrence entre c_k et c_{k+1} , et en déduire une expression de c_k à l'aide d'un produit.
Ind. Exprimer $F(q^2z)$ en fonction de $F(z)$.

Démonstration. • Existence claire, via $f(z) = f(1/z)$. Unicité via l'unicité polynomiale.

- On a $F(q^2z) = F(z) \frac{1+q^{2n+1}z}{1+qz} \frac{1+z^{-1}q^{-1}}{1+q^{2n-1}z^{-1}}$. Multiplier par le dénominateur, identifier. □

Exercice 195 [X MP 2023 # 290] Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(X+Y)^n$ soit congru à $X^n + Y^n$ modulo p .

Démonstration. Pour $n = p$ ok, si $n = p^\alpha$ aussi. Sinon, cf Lucas pour les coefficients binomiaux : on choisit un p qui divise n , on veut $\forall u, \lfloor \frac{n}{p^u} \rfloor = \lfloor \frac{k}{p^u} \rfloor + \lfloor \frac{n-k}{p^u} \rfloor$, il faut écrire la décomposition en base p . □

Exercice 196 [X MP 2023 # 291] Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(0) \neq 0$. Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que X^n divise $P^k - f$.

Démonstration. C'est des DLs : faire le DL de $\sqrt[k]{f}$. □

Exercice 197 [X MP 2023 # 292] Soit p un nombre premier. Pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X, Y]$, on note $P \equiv Q [p]$ pour signifier que $P - Q$ a tous ses coefficients (devant les $X^k Y^l$) divisibles par p . On adopte une définition similaire pour les polynômes à une indéterminée.

- Exhiber un polynôme $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y) [p]$, $P \not\equiv T [p]$ et $P \not\equiv 0 [p]$.
- Exhiber un polynôme $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y) [p]$, $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y) [p]$, $P \not\equiv T [p]$ et $P \not\equiv 0 [p]$.
- Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[T]$ tels que $P(XY) \equiv P(X)P(Y) [p]$ et $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y) [p]$.

Démonstration. • T^p

- T^p
- La première dit que P est un monôme, puisque $P(X)P(Y)$ est une somme de sommandes que l'on peut identifier. La seconde que c'est un X^{p^α} . □

Exercice 198 [X MP 2023 # 293] Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des complexes deux à deux distincts. Soient $n_1, \dots, n_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $H_1, \dots, H_r$ dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un $H \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X - \alpha_i)^{n_i}$ divise $H - H_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Démonstration. Interpolation de Hermite. □

Exercice 199 [X MP 2023 # 294] • Soient $N_1, \dots, N_r$ des entiers premiers entre eux deux à deux, et $f_1, \dots, f_r$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier F tel que $F \equiv f_i [N_i]$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

- Soient $N_1, \dots, N_r$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux deux à deux, et $f_1, \dots, f_r$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe $F \in \mathbb{C}[X]$ tel que N_i divise $F - f_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.
- Soient f, g deux éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $h \in \mathbb{C}[X]$ tel que g divise $h^n - f$.

Démonstration. •

-
- Se ramener au cas de $g = X^k$, qui se fait par DL via ce qui précède, peut-être.
 $g = \prod (X - \alpha_i)^{\beta_i}$. On veut que $\forall i, h^n \equiv f[(X - \alpha_i)^{\beta_i}]$. Via des DLs, il existe h_i tel qu'il suffise que $h \equiv h_i[(X - \alpha_i)^{\beta_i}]$ (ici on utilise $f \wedge g = 1$, h_i est obtenu en prenant une racine n -ième de f). □

Exercice 200 [X MP 2023 # 295] Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $X^{n+1} - nX^n + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Démonstration. Pour $n = 2, 1$ est racine :)

Critère de Perron : si $|a_{n-1}| > 1 + |a_0| + \dots + |a_{n-2}|$ et $a_0 \neq 0$.

D'une part, il n'y a pas de racines de module 1. Donc au moins une racine complexe est > 1 .

On écrit $P = (X - x_1)Q$. Et on obtient que $\sum_{i=0}^{n-2} |q_i| < 1$. Donc toutes les racines de Q sont de module < 1 . □

Exercice 201 [X MP 2023 # 296] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire dont les racines complexes ont un module inférieur ou égal à 1. Montrer que les racines de P sont des racines de l'unité.

Exercice 202 [X MP 2023 # 297] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ possédant n racines distinctes $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$. On écrit $P^2 + 1 = Q_1 \dots Q_r$ ou les Q_i sont dans $\mathbb{Z}[X]$. On pose $R = \sum_{i=1}^r Q_i^2 - r$. SUP

- Montrer que les x_k sont racines au moins doubles de R .
- En déduire qu'il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\deg(Q_i) \geq 2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Démonstration. • $R' = \sum Q_i' Q_i$; $2PP' = (\prod Q_i) \sum \frac{Q_i'}{Q_i}$

- R est de degré $\geq 2n$. Donc un des Q_i est de degré $\geq n$. Si n pair c'est bon.
Si n est impair, il faut montrer qu'un des Q_i est de degré $n+1$. Cela vient du fait que $P^2 + 1 = \prod Q_i$, donc les Q_i ne peuvent pas avoir de racines réelles. □

Exercice 203 [X MP 2023 # 298] On se propose de donner une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss. SUP

- Montrer qu'il suffit de montrer le théorème pour les polynômes à coefficients réels. Dans la suite, on écrira le degré d'un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme $2^n q$, ou $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ est impair. La preuve se fait par récurrence sur n .

- Montrer le théorème dans le cas où $n = 0$.
Dans la suite, on suppose le résultat vrai jusqu'au rang n , ou $n \geq 1$ est fixe.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2^n q$, où $n \geq 1$. On admet l'existence d'une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ sur laquelle P est scindé, et on note $x_1, \dots, x_d$ ses racines dans $\mathbb{K}$, distinctes ou non. Ayant fixé $c \in \mathbb{R}$, on pose $y_{ij}(c) = x_i + x_j + cx_i x_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq d$.
 - ▷ Montrer que le polynôme $Q_c = \prod_{i \leq j} (X - y_{ij}(c))$ est à coefficients réels.
 - ▷ Montrer que l'un des $y_{ij}(c)$ est élément de $\mathbb{C}$.
 - ▷ Montrer finalement que l'un des x_i est élément de $\mathbb{C}$.

Démonstration. • Considérer $Q\overline{Q}$.

- Tout polynôme de degré impair admet une racine.
- - ▷ Propriété de symétrie : prendre son conjugué.
 - ▷ Découle de la première question.
 - ▷ Pour tout $c \in \mathbb{R}$, un des $x_i + x_j + cx_i x_j$ est dans $\mathbb{R}$. Si $i = j$ c'est bon. Sinon, pour une infinité de c , c'est le même couple, donc $x_i + x_j \in \mathbb{C}$, et $x_i x_j \in \mathbb{C}$. □

Exercice 204 [X MP 2023 # 299] Soient $F \in \mathbb{C}(X)$ et $q \in \mathbb{C}^*$. SUP

- On suppose que q n'est pas une racine de l'unité. Montrer qu'il existe au plus deux fractions rationnelles $G \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F = 1 + G(qX)G(q^{-1}X)F(q^{-2}X)$, et que s'il y en a deux alors elles sont opposées l'une de l'autre.
- Montrer que le résultat précédent peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus que q n'est pas une racine de l'unité.

Démonstration. • On a $G(qX)G(q^{-1}X) = \frac{F-1}{F(q^{-2}X)}$.

Si x_i sont les poles/racines de G , les poles/racines de $G(qX)G(q^{-1}X)$ sont les qx_i et les $q^{-1}x_i$, de multiplicités $m(y_i) = m_{q^{-1}y_i} + m_{qy_i}$.

Ces multiplicités déterminent entièrement les multiplicités d'origine, car q n'est pas une racine de l'unité (... technique à écrire).

Si on a l'égalité $G(qX)G(q^{-1}X) = G'(qX)G'(-1X)$, on a les mêmes poles/racines, et quitte à les retirer, on a la même constante, à $\pm$ près. □

Exercice 205 [X MP 2023 # 300] Soit G un groupe, $\mathcal{M}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie libre du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^G$.

Exercice 206 [X MP 2023 # 301] On note C l'ensemble des matrices de $GL_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont non nuls. Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in C$, on pose $J(M) = \left(\frac{1}{m_{i,j}} \right)_{1 \leq i,j \leq 2}$. Soit $\varphi: C \rightarrow C$ qui à M associe $J(M^{-1})$. Montrer que φ est bien définie et trouver \ la quelle condition sur $M \in C$ la suite $(\varphi^n(M))_{n \geq 1}$ est stationnaire, ou bien périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow (ad - bc) \begin{pmatrix} 1/d & -1/b \\ -1/c & 1/a \end{pmatrix}$ Si on est un point fixe, on vérifie $a/b = -\frac{1/d}{1/b}$, c'est-à-dire $b^2 = -ad$ et $c^2 = -ad$. Donc $b = \pm c$, mais si $b = -c$, $ad - bc = 0$, donc $b = c$.

et $ad - bc = 2ad = -2b^2$

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$, donc pas de point fixe.

Si on applique une deuxième fois l'application, comme $\varphi(cx) = c\varphi(x)$, on obtient $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow (ad - bc) \left(\frac{1}{da} - \frac{1}{bc} \right) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Donc on est point fixe si et seulement si $(ad - bc)(bc - ad) = adbc \Leftrightarrow (ad - bc)^2 = -adbc \Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 3XY$. M'enfin, si c'est le cas, c'est directement le cas je dirais, peut-être. □

Exercice 207 [X MP 2023 # 302] Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ non nulle et $M = I_n + 3R$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k \neq I_n$.

Démonstration. $R = \frac{A - I_n}{3}$, mais les valeurs propres de R sont de module 1, donc N est diagonalisable, avec des valeurs propres < 1 , donc $N^k \rightarrow 0$, donc N nilpotent, et comme N diagonalisable, $N = O_n$. □

Exercice 208 [X MP 2023 # 303] Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur et que $pu + up = u$. Montrer que $\text{tr}(u) = 0$. SUP

Démonstration. On a $u(\text{Ker } p) \subset \text{Im } p$ et $u(\text{Im } p) \subset \text{Ker } p$. □

Exercice 209 [X MP 2023 # 304] Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi_{A,B}: M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. SUP

Soit $T = \{\varphi_{A,B}, (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.

- L'ensemble T est-il un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel?
- Montrer que l'espace vectoriel engendré par T est $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Démonstration. • Non.

- On prend les $E_{ij}ME_{kl}$, ils forment une famille libre. □

Exercice 210 [X MP 2023 # 305] Pour une matrice de projecteur $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $R_P = \det(I_n + (X - 1)P)$. SUP

- Calculer R_P en fonction de P .
- Soient P, Q des matrices de projecteurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $PQ = QP = 0$. Montrer que $R_P R_Q = R_{P+Q}$.
- Soit φ un automorphisme de la $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - ▷ Montrer que $\varphi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - ▷ Que dire du rang de $\varphi(E_{i,j})$, pour i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
 - ▷ Montrer que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im } \varphi(E_{i,1})$.

Démonstration. • $R_P = X^r$

- C'est-à-dire que $\text{rang}(P + Q) = \text{rang } P + \text{rang } Q$.

▷

□

Exercice 211 [X MP 2023 # 306] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une application $q: V \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $u^2 = q(u) \text{id}_E$ pour tout $u \in V$.

- Montrer que, pour tous $u, v \in V$, il existe $B(u, v) \in \mathbb{C}$ tel que $uv + vu = 2B(u, v) \text{id}_E$.
- Montrer que B est une forme bilinéaire.
- Soient $d \geq 1$ et $u_1, \dots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Montrer que $(u_1, \dots, u_d)$ est libre.
- Soient $d \geq 2$ et $u_1, \dots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Montrer que les u_i sont de trace nulle, et que $\dim E$ est paire.

Démonstration. • $(u + v)^2$

- Se vérifie.
- Probablement comme si ils étaient orthogonaux...
- $u_i^2 = -\text{Id}_E$ et $u_i u_j + u_j u_i = 0$ et les endomorphismes anti-commutent, donc u_j envoie E_i sur E_{-i} .

□

Exercice 212 [X MP 2023 # 307] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que $\varphi(I_n)$ est inversible et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(A) \varphi(B)$. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(A) = PAP^{-1}$.

Exercice 213 [X MP 2023 # 308] • Caractériser les endomorphismes φ de $\mathbb{C}(X)$ vérifiant $(*) : \forall F_1, F_2 \in \mathbb{C}(X), \varphi(F_1 F_2) = \varphi(F_1) \varphi(F_2)$.

- Déterminer les automorphismes de $\mathbb{C}(X)$ vérifiant $(*)$.

Exercice 214 [X MP 2023 # 309] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j, m_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$.

- Montrer que 1 est valeur propre de M et que toute valeur propre de M est de module ≤ 1 .
- On note $\mu = \min_{1 \leq i \leq n} m_{i,i}$. Montrer que le spectre de M est inclus dans le disque de centre μ et de rayon $1 - \mu$.
- On suppose que $\mu > 0$ et que 1 est valeur propre de multiplicité 1 dans χ_M . Montrer que $(M^p)_{p \geq 1}$ converge vers une matrice de rang 1 dont toutes les lignes sont égales.
- On se donne trois réels strictement positifs p, q, r tels que $p + q + r = 1$. On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b_{i,i} = r, b_{i,i+1} = q$ si $i > 2, b_{1,2} = p + q, b_{i+1,i} = p$ si $i < n - 1, b_{n,n-1} = p + q$, et tous les autres coefficients sont nuls. Montrer que 1 est valeur propre simple de B , et expliciter la limite de $(B^k)_{k \geq 0}$.

Démonstration. •

- Retirer I_n et multiplier par $\frac{1}{1-\mu}$.
- Il n'y a qu'une seule valeur propre de module 1, de vecteur propre $(1, 1, \dots, 1)$.

Direct via les espaces caractéristiques.

On peut aussi écrire $\chi_M = (X-1)Q$, avec $(X-1)U + VQ = 1$, alors $(M-1)U(M)$ est la projection sur l'espace caractéristique. Ensuite jsp.

•

□

Exercice 215 [X MP 2023 # 310] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, F un sous-espace de E stable par f . Montrer que l'induit par f sur F est cyclique.

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel stable. À F on associe l'ensemble des polynômes P tel que $P(u)(x) \in F$, c'est un idéal, qui contient χ_u , donc correspond à un diviseur D de χ_u .

Il y en a donc un nombre fini, et il en va de même de l'induit.

Réciproquement, si u a un nombre fini d'espaces stables, il est cyclique (si le corps est infini), puisque la réunion de ses espaces stables ne donne pas tout l'ensemble.

Si le corps est fini, on a obtenu $F = \text{Ker } \frac{\chi_u}{D}$; F contient $D(u)(x)$, dont le polynôme minimal est $\frac{\chi_u}{D}$. Donc $\pi_F = \frac{\chi_u}{D}$. Le problème est d'empêcher que deux espaces stables correspondant à deux polynômes minimaux différents aient le même polynôme caractéristique.

Si on admet que tout facteur irréductible de χ est un facteur de π , la propriété de monotonie permet d'exclure ce qui précède : si π est un facteur irréductible, les $\text{Ker } \pi^k(u)$ sont strictement croissants, de polynômes caractéristiques π^ℓ , donc nécessairement $\ell = k$, et le lemme des noyaux permet de conclure.

□

Exercice 216 [X MP 2023 # 311] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ telles que $ab - ba = fv$.

- Que peut-on dire de $\det(ab - ba)$?
- Montrer que a et b sont cotrigonalisables.
- À quelle condition sur $u \in \mathcal{L}(E)$ existe-t-il $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uw - wv$ soit de rang 1?

Démonstration. • fv est un endomorphisme de rang 1, on note son image $\text{Vect}(t)$.

- Si $\text{Ker } b$ non stable par a , alors il existe x tel que $-b(a(x)) \in \text{Vect } t$, donc $t \in \text{Im } b$. Alors $\text{Im } b$ est stable par a .

En appliquant ça à des $b - \lambda I_n$ répétitivement, on trouve un vecteur propre commun.

- Si u a deux valeurs propres distinctes, en diagonalisant u par blocs et en prenant une matrice v avec un unique 1 à l'intersection, on obtient une matrice de rang 1.

Si u a une unique valeur propre, on peut supposer u nilpotente. Alors, si u est non nulle, on peut prendre v de rang 1, qui envoie un élément de l'image de u sur un élément du noyau de u , et on obtient $uv - vu$ de rang 1. $\square$

Exercice 217 [X MP 2023 # 312] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout vecteur $x \in E$, l'ensemble $\{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

- Montrer que, si $f \in \text{GL}(E)$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = \text{Id}$.
- On revient au cas général. Montrer l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $f^{p+k} = f^p$.

Démonstration. • Les valeurs propres sont des $\mathbb{U}_k$, et si elle n'était pas diagonalisable, dans un espace caractéristique, on a $f = \lambda I_n + N$, prendre un élément dans le noyau de N^2 mais pas dans le noyau de N .

- Décompositions en espaces caractéristiques. $\square$

Exercice 218 [X MP 2023 # 313] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associée à σ . Montrer que, si σ et σ' sont dans $\mathcal{S}_n$, σ et σ' sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

Exercice 219 [X 2023 # 314] Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E .

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
2. Montrer que $E = \text{Im } p + \text{Ker } q + (\text{Im } q \cap \text{Ker } p)$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
4. Montrer que le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

Démonstration. 1. Il est symétrique.

2. $\text{Im } p + \text{Ker } q$ est l'orthogonal de $\text{Im } q \cap \text{Ker } p$.

3. On prend une base de $\text{Im } p$, que l'on complète avec du $\text{Ker } q$ et $\text{Im } q \cap \text{Ker } p$, sur lesquels $p \circ q$ est nul. Alors la matrice de $p \circ q$ est triangulaire inférieure par blocs : $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ et le bloc A est diagonalisable, d'après la première question.

On peut aussi les voir comme limites de produit AB avec A def pos, auquel cas $AB \sim \sqrt{AB}\sqrt{A}$, qui est diagonalisable.

4. C'est trivial. $\square$

Exercice 220 [X MP 2023 # 315] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $L_n = D^n((X^2 - 1)^n)$, où D désigne l'opérateur de dérivation des polynômes.

- Déterminer le degré de L_n . Montrer que $\int_{-1}^1 L_n(t) P(t) dt = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Montrer que L_n est scindé à racines réelles simples $x_1 < \dots < x_n$ avec $x_1 > -1$ et $x_n < 1$.
- Montrer qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k P(x_k)$.

Exercice 221 [X 2023 # 316] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes.

- $\alpha = 2$.
- $\forall n \geq 1, \forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in (S^2)^{3n}, \exists p \in S^2$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \|p - a_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - b_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - c_i\|^\alpha$$

Démonstration. Pour $\alpha = 2$, on veut $\langle p, \sum a_i \rangle = \langle p, \sum b_i \rangle = \langle p, \sum c_i \rangle$, c'est-à-dire p orthogonal à la fois à $\sum a_i - b_i$ et à $\sum c_i - b_i$. Réciproquement, on l'applique avec n fois le même point simple : $n \|(1, 0, 0) - p\|^\alpha + \|(0, 1, 0) - p\|^\alpha = n \|(0, 1, 0) - p\|^\alpha + \|(0, 1, 0)\|^\alpha = n \|(0, 0, 1) - p\|^\alpha + \|(1, 0, 0)\|^\alpha$ par exemple. Nécessairement, le point $p_n \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, et on fait un DL à l'ordre 2?

Plutôt : n fois un point, n fois un autre et $n/2$ fois l'un ou l'autre, ou leurs opposés? Chiant.

Si on écrit $p_n = (1/\sqrt{3} + x_n, 1/\sqrt{3} + y_n, 1/\sqrt{3} + z_n)$, à l'ordre 1, être sur la sphère donne $x_n + y_n + z_n = 0$, et les distances donnent $\dots$ $\square$

Exercice 222 [X MP 2023 # 317] Existe-t-il $A \in \text{SO}_2(\mathbb{Q})$ telle qu'il n'existe pas $B \in \text{SO}_2(\mathbb{Q})$ vérifiant $B^2 = A$?

Démonstration. Par l'absurde, si toute matrice a une racine carrée rationnelle. S'il en existe une, son opposé marche aussi. On a $\cos \theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$: on passe de $\frac{p}{q}$ à $\sqrt{\frac{q+p}{2q}}$, donc le dénominateur diminue, donc fini par atteindre 1 ou 2, ce qui n'est pas possible. $\square$

Exercice 223 [X MP 2023 # 318] Soient E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{S}(E)$, $\Phi: \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \|f(v)\|^2 - \langle f(v), v \rangle^2 \end{matrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ admette un extremum.

Démonstration. Si λ est valeur propre, $\Phi(tv_\lambda) = \lambda^2(t^2 - t^4)$, donc pas de minimum.

Si toutes les valeurs propres sont > 0 , $\|f(x)\| \rightarrow +\infty$.

Ça marche pareil si l'une des valeurs propres est nulle.

Si une est négative l'autre positive, vérifier avec le cas $n = 2$ qu'on peut prendre des valeurs arbitrairement grandes : prendre v tel que $\langle v, f(v) \rangle = 0$. $\square$

Exercice 224 [X MP 2023 # 319] On considère dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

- Soit $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $K^2 = -I$. Montrer que $K^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $J = K^T J K$.
- On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telles que $K^2 = -I$ et $K^T J \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $K \in \mathcal{C}$. Montrer que $K + J$ est inversible et que $(K + J)^{-1}(K - J)$ est symétrique.
- Soit $K \in \mathcal{C}$. On pose $S = (K + J)^{-1}(K - J)$. Montrer que $SJ + JS = 0$.

Démonstration. •

- $K + J = K + K^T J K = (I_n + K^T J)K$. En écrivant ce qu'on veut, et en multipliant par les inverses, on obtient qu'on veut $KJ + JK^T = O_n$, et on utilise $K^{-1} = -K$.
- Remplacer le S de droite par sa transposée, multiplier par les inverses, et développer. $\square$

Exercice 225 [X MP 2023 # 320] Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$, $\det(A + B) \geq \max(\det(A), \det(B))$.

Démonstration. Simple ? Écrire $A = PDP^T$ et $B = PP^T$, si $\det B > 0$. $\square$

Exercice 226 [X MP 2023 # 321] GOLDEN-THOMPSON INEQUALITY Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\text{tr}(e^A e^B) > 0$.
- Montrer que $\text{tr}(e^{A+B}) \leq \text{tr}(e^A e^B)$.

Démonstration. • On se ramène à A diagonale, et e^B est définie positive, donc de coefficients diagonaux > 0 .
ou directement, $\text{tr}(e^A e^B) = \text{tr}(e^{A/2} e^B e^{A/2})$, et la matrice intérieure est définie positive.

- Cf <https://terrytao.wordpress.com/2010/07/15/the-golden-thompson-inequality/>, et un énoncé de l'année précédente. Super dur, et utilise au finale que $e^{A+B} = \lim(e^{A/p} e^{B/p})^p$. $\square$

Exercice 227 [X 2023 # 322] Soit $t_1, \dots, t_n$ des réels.

1. Montrer que la matrice $A = (t_i t_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. On suppose $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$. Montrer que la matrice $B = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$. Montrer que $M = B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1. $X^T A X = (\sum t_i x_i)^2$

$$2. \int \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i} \right)^2$$

3. Il s'agit de montrer que $\int_0^1 \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i} \right)^2 \geq (\sum t_i x_i)^2$, c'est-à-dire $\int h^2 \geq \left(\int h \right)^2$, car l'intégrale est sur $[0, 1]$. C'est Cauchy-Schwarz. $\square$

Exercice 228 [X MP 2023 # 323] INÉGALITÉ DE HILBERT On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire standard et on note $\|A\| = \sup_{X \in B_f(0,1)} \|AX\|$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\|A\| = \sup_{(X,Y) \in B_f(0,1)^2} |\langle AX, Y \rangle|$.
3. On prend $A = \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Pour X, Y dans $\mathbb{R}^{n+1}$, en interprétant $\langle AX, Y \rangle$ comme une intégrale, montrer que

$$\langle AX, Y \rangle^2 \leq 4 \sum_{\substack{i,j \\ i+j \text{ pair}}} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \sum_{\substack{i,j \\ i+j \text{ pair}}} \frac{y_i y_j}{i+j+1}.$$

4. À l'aide d'une intégrale faisant intervenir $P: t \mapsto \sum_{k=0}^n x_k e^{ikt}$ et $Q: t \mapsto \sum_{k=0}^n y_k e^{ikt}$, en déduire que $\|A\| \leq \pi$.

Démonstration. 1.

2.

3. C'est $\int_0^1 P(t)Q(t) dt$, et Cauchy-Schwarz donne ce qu'on veut, en majorant $\int_0^1 P(t)^2 \leq \int_{-1}^1 P(t)^2$

4. C'est $\int_{-1}^1 P(t)^2 = \int_0^\pi P(e^{it})^2 e^{it} dt$, que l'on majore par l'intégrale du module, qui fait $\sum |x_i|^2$. $\square$

2) Analyse

Exercice 229 [X MP 2023 # 324] Trouver $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, discontinue en $(0,0)$, dont la restriction à toute droite passant par $(0,0)$ est continue.

Démonstration. $f(x,y) = \frac{x^4}{y^2+x^6}$ □

Exercice 230 [X 2023 # 325] Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un convexe fermé non vide.

1. On suppose K borné. Montrer que K s'écrit comme intersection de carrés fermés.
2. On suppose K non borné et $K \neq \mathbb{R}^2$. Donner des exemples de tels convexes. Montrer que si K contient deux droites, celles-ci sont parallèles.
3. On suppose toujours K non borné. Montrer que K contient une demi-droite.

Démonstration. 1. Si $x \notin K$, on peut trouver une droite séparant x de K , donc un carré contenant K et non x .

2. Si K contient deux droites non parallèles, $K = \mathbb{R}^2$. La partie au dessus du graphe de $x \mapsto e^x$.

3. Fixer $y \in K$, et une suite $(x_n) \in K$ qui tend vers ∞ , et prendre une valeur d'adhérence des segments $[y, x_n]$. □

Exercice 231 [X MP 2023 # 326] Déterminer les endomorphismes continus du groupe $\mathbb{C}^*$.

Exercice 232 [X MP 2023 # 327] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la structure euclidienne canonique. On définit une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ en posant, pour $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sup \{ \|Mx\| ; x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1 \}$.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.
- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On suppose que la série de terme général $|u_n - 1|$ converge. Montrer que la suite de terme général $\prod_{k=0}^n u_k$ converge.
- E Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que la série de terme général $\|M_n - I_d\|$ converge. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = M_0 \times M_1 \times \dots \times M_n$.
- Montrer que la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ converge.
- Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la suite de terme général $M_{\sigma(0)} \times \dots \times M_{\sigma(n)}$?
- Soit $E = \left\{ \prod_{k=0}^{+\infty} M_{\sigma(k)}, \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}) \right\}$. Existe-t-il une suite de matrices pour laquelle E n'est pas fermé ?
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Existe-il $(M_n)_{n \geq 0} \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que E possède exactement k composantes connexes ?

Démonstration. •

- On a $B_{n+1} - B_n = \left(\prod_{i=0}^n M_i \right) (I_n - M_n)$, dont la série converge.
- Pour la même raison, elle converge.
- Non, si on a une suite de σ_ℓ , on peut en extraire une permutation.
- Si les M_n commutent, E est un point.

On pourrait aussi les prendre presque toutes égales à I_n . Si on prend des diagonales commutantes et deux matrices de permutations inverses, et une matrice diagonale avec un zéro, soit le zéro est à son emplacement d'origine, soit le zéro est en $\sigma(1)$, soit le zéro est en $\sigma^{-1}(1)$. Donc on peut obtenir 2, ou 3 composantes connexes (pas sûr...)

On peut fondamentalement remplacer le 0 par un élément très petit.

Si on prend comme σ un produit de transpositions (de sorte que $P_\sigma = P_\sigma^{-1}$), et qu'on met quatre fois cette matrice de transposition.!! □

Exercice 233 [X MP 2023 # 328] On définit la longueur d'un intervalle borné I de bornes a et b par $\ell(I) = |b - a|$.

- Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $I_1, \dots, I_N$ des intervalles bornés de $\mathbb{R}$ tels que $[0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$. Que peut-on dire de $\sum_{i=1}^N \ell(I_i)$?
- Soit $(I_n)_{n \geq 1}$ une suite d'intervalles bornés de $\mathbb{R}$ telle que $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n)$?

Démonstration. •

- Si $\sum \ell(I_n) < 1$, on montre que ce n'est pas possible. On considère une suite (ε_n) telle que $\sum \ell(I_n) + \varepsilon_n < 1$. On choisit $x_0 = 0$, puis le plus grand intervalle restant qui contient (n'existe pas ...) x_0 , puis $\ell(I_{n_0}) < x_1 < \ell(I_{n_0}) + \varepsilon_{n_0}$, puis le plus grand qui le contient etc. □

Exercice 234 [X MP 2023 # 329] Dans $\mathbb{R}^2$, on note D le disque unité fermé pour la norme infinie, C la sphère unité pour la norme infinie. On cherche à montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $r: D \rightarrow C$ telle que la restriction de r à C soit l'identité.

1. On considère une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, antisymétrique (i.e. $f(x,y) = -f(y,x)$), et $A = (a_{i,j})_{i,j \leq n}$ une matrice réelle telle que : $\forall i, j \in [1, n-1]$, $f(a_{i,j}, a_{i+1,j}) + f(a_{i+1,j}, a_{i+1,j+1}) + f(a_{i+1,j+1}, a_{i,j+1}) + f(a_{i,j+1}, a_{i,j}) = 0$.

Montrer que : $\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i,1}, a_{i+1,1}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{n,j}, a_{n,j+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1,n}, a_{i,n}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{1,j+1}, a_{1,j}) = 0$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & & & & 3 \\ \vdots & & M' & & \vdots \\ 1 & & & & 3 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est à coefficients dans $\{1, 2, 3\}$. Montrer qu'au moins un des petits carrés de M comporte trois valeurs différentes.

3. Montrer qu'on dispose d'un $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in D$ vérifiant $\|x - y\|_\infty \leq \eta$, on a $\|r(x) - r(y)\| \leq \frac{1}{10}$.
4. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{n-1} \leq \eta$. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $v_{i,j} = \left(1 - 2\frac{i-1}{n-1}, 1 - 2\frac{j-1}{n-1}\right)$.
Montrer que, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $r(v_{i,j})$, $r(v_{i+1,j})$, $r(v_{i,j+1})$, $r(v_{i+1,j+1})$ sont contenus dans une boule de rayon $1/10$.
5. En utilisant une fonction bien choisie de C dans $\{1, 2, 3\}$, aboutir à une contradiction et conclure.
6. Utiliser ce résultat pour montrer que toute fonction continue de D dans D admet un point fixe.

Démonstration. 1.

2. Utiliser 1. avec $f(x, y) = (x - y)$.
3. UC.
4. Vide.
5. Découper C régulièrement.
6. Par l'absurde, si f n'a pas de point fixe, on considère g qui à tout x associe l'intersection de la demi-droite $[x, f(x))$ avec le cercle (ou l'inverse). $\square$

Exercice 235 [X 2023 # 330] On dit qu'une famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de disques fermés de $\mathbb{R}^2$ vérifie $(\mathcal{P})$ si

- pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ distincts, D_s et D_t ont des centres distincts,
 - pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t$, $D_s \subset D_t$.
1. Existe-t-il une telle famille?
 2. Soit $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 et injective. Existe-t-il une famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ vérifiant $(\mathcal{P})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$ soit le centre de D_t ?
 3. Le résultat subsiste-t-il si A est seulement supposée continue?

Démonstration. 1. Cercles de centre $(x, 0)$, de rayon x .

2. Prendre D_t de rayon la longueur de la courbe de $A(0)$ à $A(t)$.
3. Prendre une fonction non réglée. $\square$

Exercice 236 [X MP 2023 # 331] Dans tout l'énoncé, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une $\mathbb{K}$ -algèbre A de dimension finie, et on identifie $\mathbb{K}$ à une sous-algèbre de A via $\lambda \mapsto \lambda.1_A$. On suppose donnée sur A une norme multiplicative $\| \cdot \|$, autrement dit une norme vérifiant $\forall (a, b) \in A^2$, $\|ab\| = \|a\| \|b\|$. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\|z_0 - x\| \leq \|z - x\|$.
- On suppose $\|a\| = 2$ pour $a = z_0 - x$. Montrer que $\|a - e^{\frac{2ikx}{n}}\| \geq 2$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
- En déduire que $\|a - 1\| = 2$.
- En déduire que $A = \mathbb{C}$.
- Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant des polynômes annulateurs.

Dans la suite, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Est-ce que A est nécessairement égale à $\mathbb{R}$?
- On admet qu'il existe une $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathbb{H}$ ayant une base de la forme $(1, i, j, k)$ ou i, j, k anticommulent deux à deux et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On considère la symétrie $x \mapsto \bar{x}$ par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$, et on considère la norme $N: q \mapsto \sqrt{q\bar{q}}$. Montrer que N est bien définie, est effectivement une norme, et qu'elle est multiplicative.
- Montrer que A est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$ -algèbre, à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Exercice 237 [X 2023 # 332] Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^4 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{N}$.

Démonstration. Dérivée discrète. $\square$

Exercice 238 [X MP 2023 # 333] Pour $n \geq 2$, on note $\ell_n = \min \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{1}{2} \right\}$.

- Montrer que $\ell_n = o(n)$.
- Donner un équivalent de ℓ_n .

Démonstration. • C'est montrer que $\forall c$, $\prod_{i=1}^{cn} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{1}{2}$ APCR. Ou bien par comparaison $\sum / \int$, ou somme de Riemann un peu technique.

- La comparaison $\sum / \int$ devrait marcher... $\square$

Exercice 239 [X 2023 # 334] Soient (a_n) et (b_n) , deux suites réelles positives telles que la série de terme général b_n converge, que la série de terme général na_n diverge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = b_n + \sum_{k=0}^n u_k a_{n-k}$.
2. Montrer que (u_n) est bornée.
3. Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 0.

Démonstration. Cf une année précédente. $\square$

Exercice 240 [X MP 2023 # 335] On considère la suite réelle définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que $x_n \sim C 2^n n^2$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Résultats intermédiaires pertinents, peut-être pas tous nécessaires.

- On montre que $x_n \rightarrow +\infty$.
- On montre que $n = o_{+\infty}(x_n)$
- De même $n^2 = o_{+\infty}(x_n)$.
- Chercher alors à montrer que $u_n = \left(\frac{\ln x_n}{2^n}\right)$ converge (vers une constante C),
▷ Écrire u_{n+1} en fonction de u_n . L'expression se prête naturellement au lien suite $\leftrightarrow$ série.
- Poser $\ln x_n = C 2^n + y_n$, écrire la relation sur y_n . Reste à montrer que $y_n = 2 \ln n + o_{+\infty}(1)$. $\square$

Exercice 241 [X MP 2023 # 336] Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite réelle définie par $a_0 = 1, a_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 2a_n + \frac{a_n - 1}{n^2}$. Donner un équivalent de a_n .

Démonstration. On a (a_n) croissante, puis $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 2$, donc $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{a_n - 1}{2n^2 a_n}\right)$, donc $\ln(a_n) = n \ln 2 + C + o(1)$. $\square$

Exercice 242 [X MP 2023 # 337] Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 = \pi/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sin(a_n)$. Nature de la série de terme général a_n^2 ?

Démonstration. On a $a_{n+1} - a_n \sim a_n^3$, donc $\sum a_n^3$ converge. Il faut trouver un équivalent de a_n , via la méthode usuelle. $\square$

Exercice 243 [X MP 2023 # 338] Soit $\sum u_n$ une série convergente de réels positifs. Existe-t-il une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ de réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que la série $\sum u_n v_n$ converge ?

Démonstration. $\square$

Exercice 244 [X MP 2023 # 339] Soit (x_n) une suite réelle. On suppose que $(x_n y_n)$ est sommable pour toute suite réelle (y_n) de carré sommable. Montrer que (x_n) est de carré sommable.

Démonstration. Prendre $y_n = \frac{x_n}{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \frac{x_n}{S_n}$? On a bien $\sum x_n y_n$ qui diverge, mais il semble pas nécessaire que $\sum y_n^2$ converge.

Mais, en fait on va parfois prendre $y_n = 0$, et parfois l'autre (sur une plage $[N, 2N]$). On prend $y_n \neq 0$, sur une plage $[N, 2N]$, où on sait que $S_N > 2^N$. $\square$

Exercice 245 [X MP 2023 # 340] Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 246 [X MP 2023 # 341] Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{\sin(\ln n)}{n}$.

Exercice 247 [X MP 2023 # 342] On pose $u_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \geq 1$.

- Montrer que u converge vers une limite ℓ .
- Montrer que $\ell = -(\sqrt{2} + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.
- Montrer que $u_n = \ell + \frac{1}{2n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
- Montrer que $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2}$.
- Étudier les variations de u .
- Déterminer un développement asymptotique similaire pour la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.
- Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner un développement asymptotique à trois termes pour $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 248 [X 2023 # 343] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Démonstration. La série $\sum \frac{1}{f(n)}$ a la même nature que $\int \frac{1}{f}$. On peut raccorder f de manière $\mathcal{C}^1$, puis on pose $u = f(t)$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u f'(f^{-1}(u))} du,$$

puis IPP. $\square$

Exercice 249 INÉGALITÉ DE HILBERT [X MP 2023 # 344] • Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} \leq \pi$.

Ind. : Dans $\mathbb{R}^2$, considérer les points $x_n = (\sqrt{m}, \sqrt{n})$ et l'intersection r_n du cercle $C(0, \sqrt{m})$ avec le segment $[0, x_n]$.

- Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ deux suites de carré sommable et à termes positifs. On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et $B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$. Montrer que $\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \sqrt{AB}$.
- Montrer que la constante π est optimale.

Démonstration. • Se fait par comparaison intégrale.

Méthode géométrique : on regarde les angles à l'origine faits par les segments $[0, x_n]$. On obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n = \frac{\pi}{2}$, et $\beta_n = \arctan\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{m}}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right)$, et on majore la dérivée par $\frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{m}}\right)^2}$. On obtient le résultat (noter $n = 0$ contre $n = 1$).

- On applique Cauchy-Schwarz (à la somme double), avec $\frac{a_n b_m}{n+m} = \frac{a_m}{\sqrt{n+m}} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/4} \frac{b_n}{\sqrt{n+m}} \left(\frac{n}{m}\right)^{1/4}$.
- Prendre $a_n = b_n = n^{-1/2-\varepsilon}$. □

Exercice 250 [X MP 2023 # 345] • Trouver les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y)$.
 • Trouver les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall x \neq y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$.

Démonstration. • Classique ; En passant au ln.

- On obtient f impaire, on peut supposer f croissante. On obtient $f(1) = 1$.

Puis, en posant $y = xy$, on obtient $\frac{f(x)+f(xy)}{f(x)-f(xy)} = \frac{f(1)+f(y)}{1-f(y)}$, qui donne $f(xy) = f(x)f(y)$. □

Exercice 251 [X 2023 # 346] Que dire d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$ -périodique ?

Démonstration. Easy. □

Exercice 252 [X MP 2023 # 347] Trouver les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $|f'| + |f + 1| \leq 1$.

Démonstration. On obtient $f \leq 0, f = 0 \rightarrow f' = 0$, la fonction est coincée entre -2 et 0 .

On peut juste poser $g = f + 1$, auquel cas $|g| + |g'| \leq 1$. La fonction g peut osciller tranquillement...

Remplacer par $|f'| + |f + 1| = 1$? □

Exercice 253 [X MP 2023 # 348] Pour $x \geq 1$, on note $\Theta(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}; p \leq x} \ln(p)$. Montrer que $\Theta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x)$. SUP

Démonstration. Utiliser $\binom{2n}{n}$. □

Exercice 254 [X MP 2023 # 349] Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

Démonstration. $e^{-1/d(x,F)}$ □

Exercice 255 [X MP 2023 # 350] Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de $[0, 1]^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, il existe une fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ et une suite strictement croissante $(t_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $[0, 1]$ telle que $f(t_n) = x_{\sigma(n)}$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. Si la suite (x_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence, c'est envisageable.

Sinon, ça contredit l'uniforme continuité. □

Exercice 256 [X MP 2023 # 351] Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.

Démonstration. Poser $t = \tan u$, on obtient $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan^2 u) du = -2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos u du$, qui est classique.

Elle se calcule en gardant le $\cos^2$, le transformant en $\sin^2$, et une formule de trigonométrie de $\sin(2t)$. □

Exercice 257 [X MP 2023 # 352] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n la dérivée n -ième de $(X^2 - 1)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 PL_n = 0$.
- Montrer que L_n possède n racines distinctes $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ dans $] -1, 1[$.
- Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_{-1}^1 P = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(x_i)$.

Exercice 258 [X MP 2023 # 353] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^3$.

- On suppose n impair. Montrer que $I_n = 0$.
- On suppose n multiple de 4. Montrer que $I_n > 0$.
- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{4^{3n-1}}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2n}(x) \sin^{2n}(y) \sin^{2n}(x+y) dx dy$$

Démonstration. • Changement de variable, $k' = -k$.

- n multiple de 4 signifie qu'il y a un terme central, et qu'il a un signe positif.

Il suffit de montrer que, pour $k-1 \geq n$, $\binom{n}{k}^3 \leq \frac{1}{2} \left(\binom{n}{k-1}^3 + \binom{n}{k+1}^3 \right)$.

Si c'est vrai sans les puissances 3, on aura $\frac{x^3+y^3}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \geq \dots$

Et sans les puissances 3, ça devrait être simple...

- Partir de $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, développer par le binôme. On obtient, $\sin^{2n+k}(x) \cos^k y \sin^{2n+(2n-k)}(y) \cos^{2n-k}(x) \binom{2n}{k}$, puis c'est le produit des intégrales sur x et sur y , et c'est du Wallis. □

Exercice 259 [X MP 2023 # 354] • Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $H_n: (a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) - f(t) \right)^2 dt$ admet un minimum, atteint en un unique point, et donner une expression simple de ce point en fonction de f .

- Déterminer la limite de $\min H_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. • C'est du Fourier. Les $\cos/\sin$ sont à peu près une BON, donc $a_k = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt$.

• Weierstrass. □

Exercice 260 [X MP 2023 # 355] Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{dt}{2 + \lfloor \frac{1}{t} \rfloor}$.

Démonstration. Facile □

Exercice 261 [X 2023 # 356] Soit $f: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

1. Montrer que $f(x) < \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) > \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$ pour tout $x > 0$.
3. Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration. 1. On a $xf(x) < e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$, ou IPP.

2. L'IPP donne une minoration, insuffisante (cf question suivante).

L'inégalité revient à montrer que $f(x)^2 + xf(x) - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $f(x)(f(x) + x) > 1$. En dérivant $(xe^{-x^2/2})' = e^{-x^2/2}(1 - x^2)$, donc $f(x) + x = e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt$. Puis Cauchy-Schwarz sur le produit $f(x)(f(x) + x)$ donne le résultat.

3. L'IPP donne $\frac{1}{x} - e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2} dt$, et on réitère. □

Exercice 262 [X 2023 # 357] Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{|u|, |v|\}$, calculer $I_r(u, v) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(u - re^{i\theta})(v - re^{i\theta})}$.

Démonstration. □

Exercice 263 [X MP 2023 # 358] Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable, de classe C^1 , telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. On suppose que f' s'annule en un unique $M \in \mathbb{R}$.

- Donner le tableau de variations de f . Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^m f(t) dt = \frac{1}{2}$.
- Montrer que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < M < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = \ell$.
- Supposons que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$, $f'(x_1) + f'(x_2) > 0$. Montrer que $m > M$.

Démonstration. • f est croissante, puis décroissante, puisque sa limite est nulle en $\pm\infty$.

•

• Revient à montrer que $\int_{-\infty}^M f(t) dt < \int_M^{+\infty} f(t) dt$, via un changement de variable.

On a $\int_{-\infty}^M f(t) dt = \int_0^{f(M)} f(x_1(u)) \frac{du}{f'(x_1(u))}$ et $\int_M^{+\infty} f(t) dt = - \int_0^{f(M)} f(x_2(u)) \frac{du}{f'(x_2(u))}$. □

Exercice 264 [X MP 2023 # 359] • Soient a et b deux suites réelles telles que $b - a$ converge vers 0. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $m \geq 0$, il existe un entier N_m tel que $\forall n \geq N_m, a_m \leq f_n \leq b_m$. Montrer que (f_m) converge uniformément vers une fonction constante.

- On note H l'ensemble des fonctions continues $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissantes et telles que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que H forme un groupe pour la composition des fonctions.
- Soit $f \in H$. Montrer que $\sup\{f(x) - x, x \in \mathbb{R}\} < 1 + \inf\{f(x) - x, x \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration. • La suite (f_n) est de Cauchy (à la main : choisir n_0 tel que $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$), puis $n \geq N_{n_0}$. (Ce serait bien d'avoir un argument sans Cauchy...)

Donc a_m, b_m convergent, donc f_n converge vers leurs limites.

•

• Trivial. □

Exercice 265 [X MP 2023 # 360] On note F l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, C l'ensemble des fonctions continues de F . On note aussi

$$I = \{f \in F \text{ t.q. } \forall a \in [0, 1], \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq a\} \text{ est fermé}\} \text{ et } S = \{f \in F \text{ t.q. } \forall a \in [0, 1], \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq a\} \text{ est fermé}\}$$

Pour $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $L_n(f): x \in [0, 1] \mapsto \inf_{y \in [0, 1]} (f(y) + n|x - y|) \in [0, 1]$.

- Montrer que $C = I \cap S$.
- Montrer que, si $f \in F$, $L_n(f)$ est une suite croissante d'applications continues.
- Soit $f \in F$. Montrer que $f \in I$ si et seulement s'il existe une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de C telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.

Démonstration. • $\subset$ clair; $\supset$: dans l'intersection, on a $f^{-1}([a, b])$ fermé, donc par complémentaire, $f^{-1}(]a, b])$ ouvert.

- La croissance est claire, la continuité est classique.
- Soit $f \in I$. Alors $L_n(f)$ est continue (question précédente), et $f(x) = \sup f_n(x)$, car l'ensemble $y \mid f(y) \leq f(x) - \varepsilon$ est compact.
- Réciproquement, si $f = \sup f_n$. Pour tout a , $\{x \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_n \{f_n(x) \leq a\}$ est une intersection de fermés. □

Exercice 266 [X MP 2023 # 361] Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ de classe C^1 telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{a}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

1. s Rappeler le théorème d'intégration des relations de comparaison.
2. Donner un équivalent de $\ln f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Déterminer le domaine de définition de la fonction $u: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)e^{-nx}$.
4. Déterminer les limites de u aux bornes de son intervalle de définition.
5. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $u(x) \sim \frac{C}{x^{\alpha+1}} u\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration. 1.

2. $\ln f(x) \sim a \ln x$.
3. Tout $x > 0$.
4. L'infini et 0.
5. On regarde le produit $xu(x)u\left(\frac{1}{x}\right)$. Si $f(x) = x^a$, alors $u(x) = \sum n^\alpha e^{-nx}$.

Pour α entier, c'est la dérivée α -ième de $\frac{1}{1-e^{-x}}$.

On prend $a = 1$, c'est $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$, équivalent à e^{-x} en $+\infty$, et en 0, on est équivalent à $\frac{1}{x^2}$.

Problème d'énoncé.

En général, $u(x)$ va être équivalent, en $+\infty$, à son premier terme.

En 0, les premiers termes sont toujours négligeables, donc on peut remplacer $f(n)$ par n^α , puis dans l'intégrale obtenue, il suffit de faire le changement de variable : $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-tx} dt$. $\square$

Exercice 267 [X MP 2023 # 362] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 > 0, a_1 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n+4}{n+1} a_{n+1} + \frac{3n+7}{n+2} a_n.$$

- Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif.
- Déterminer la valeur de ce rayon de convergence.

Démonstration. • On $a_{n+2} \leq C a_{n+1} + D a_n$.

- On a $a_{n+2} \geq a_{n+1} + 3a_n$, et pour tout ε , $a_{n+2} \leq (1+\varepsilon)a_{n+1} + (3+\varepsilon)a_n$. $\square$

Exercice 268 [X MP 2023 # 363] Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ sous réserve de convergence.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Étudier la continuité puis la dérivabilité de f .
- Donner un équivalent simple de f en 1^- .
- Montrer que f est développable en série entière, et préciser le développement associé.

Démonstration. • $]-1,1[$

- pas de soucis.
- Comparaison $\sum / \int$. $\square$

Exercice 269 [X MP 2023 # 364] Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ somme d'une série entière. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(z) = O(z^k)$ quand z tend vers 0. Montrer que, pour r voisin de 0^+ , il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

Démonstration. On a $f(z) \sim az^\ell$, avec $\ell \geq k$. On considère $g(\theta) = \frac{f(re^{i\theta})}{r^\ell e^{i\ell\theta}}$, g est continue, et proche de 1. Donc l'argument de $f(re^{i\theta})$ est proche de $\ell\theta$, donc il s'annule beaucoup. $\square$

Exercice 270 [X MP 2023 # 365] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et de somme f .

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall r \in [0, 1[, \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| d\theta \leq C$. Montrer que $\int_0^1 |f(t)| dt < +\infty$.

Démonstration. Formule de Cauchy donne $(a_k k)$ bornée, donc $\sum |a_k|/k$ converge. $\square$

Exercice 271 [X 2023 # 366] Soit $P = a_1 X + \dots + a_d X^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_1 impair.

1. Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k \geq 0}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(P(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$.
2. Montrer que les b_k sont tous non nuls.

Démonstration. 1.

2. Quand on dérive successivement e^P , on trouve une quantité qui vaut toujours 1 modulo 2. $\square$

Exercice 272 [X MP 2023 # 367] Pour x et q dans $]0, 1[$, on pose $(x, q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k x)$.

- Montrer que la suite de terme général $(x, q)_n$ converge vers un réel $(x, q)_\infty > 0$.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(x, q)_n}{(q, q)_n} z^n$. On notera $f_{x,q}$ sa somme sur le disque ouvert de convergence, et D son disque ouvert de convergence.
- Etablir l'identité $f_{x,q}(z) - f_{x,q}(qz) = (1-x)zf_{x,q,q}(z)$ pour tout $z \in D$.
- Etablir l'identité $f_{x,q}(z) = \frac{1-xz}{1-z} f_{x,q}(qz)$ pour tout $z \in D$.

- Démontrer que $f_{x,q}(z) = \frac{(zx,q)_\infty}{(z,q)_\infty}$ pour tout $z \in D$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminer, pour tout $z \in D$, la limite de $f_{q^\alpha,q}(z)$ quand q tend vers 1^- .

Exercice 273 [X MP 2023 # 368] • Pour $x \geq 0$ on pose $f(x) = \text{card} \{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid n^2 + m^2 \leq x\}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

- On pose $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$. Utiliser ce qui précède pour trouver un équivalent de g en 1^- .

Démonstration. •

- Considérer $(\sum t^n)g(t)^2 = \sum f(n)t^n$, avec $f(n) \sim Cn$. Puis passer aux ε pour justifier. □

Exercice 274 [X MP 2023 # 369] Soit p un nombre premier. Pour tout $F \in \mathbb{F}_p[X]$, on pose $|F| = p^{\deg F}$.

- Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re } s > 1$. Montrer que la famille $(|F|^{-s})$, indexée par les polynômes $F \in \mathbb{F}_p[X]$ unitaires, est sommable et calculer sa somme, qu'on notera $z(s)$.
- On note A l'ensemble des polynômes unitaires de $F \in \mathbb{F}_p[X]$ sans facteur carré, c'est-à-dire tels que $\forall D \in \mathbb{F}_p[X], D^2 | F \Rightarrow \deg D = 0$. Montrer que $\sum_{F \in A} |F|^{-s} = \frac{z(s)}{z(2s)}$.
- En déduire, pour tout $d \in \mathbb{N}$, la proportion de polynômes sans facteur carré parmi les polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{F}_p[X]$.

Démonstration. • Sommabilité est simple, la somme est

$$z(s) = \sum_d \frac{p^d}{p^{ds}} = \sum_d \frac{1}{p^{d(s-1)}} = \frac{1}{1 - 1/p^{s-1}} = \frac{p^{s-1}}{p^{s-1} - 1}.$$

- $z(2s)$ correspond à la somme sur tous les carrés. Par multiplicativité, on a le résultat.
- Développer le résultat $\frac{z(s)}{z(2s)} = \frac{p^{s-1}}{p^{2s-1}-1} \frac{p^{2s-1}-1}{p^{2s-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{2s-1}}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s-1}}\right) = \left(1 - \frac{1}{p^{2s-1}}\right) \sum_d \frac{p^d}{p^{ds}} = \sum_d \frac{p^d - p^{d-2}}{p^{ds}}$, donc la proportion serait $1 - \frac{1}{p}$, sous réserve d'unicité du développement $\sum \frac{u_d}{p^{ds}}$, qui revient à poser $x = \frac{1}{p^s}$. □

Exercice 275 [X MP 2023 # 370] Soit f continue sur $[0, 1]$ et $g: x \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{1+xt} dt$ pour $x \geq 0$. On suppose $f(0) \neq 0$.

- Donner un équivalent de g lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Majorer l'écart avec l'équivalent trouvé.
- Que peut-on dire de plus si f est de classe $\mathcal{C}^2$?

Démonstration. • CVD

•
•

□

Exercice 276 [X MP 2023 # 371] • Déterminer le domaine de définition de $f: x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2x} dt$.

▷ Montrer, pour tout réel $x > 0$, l'égalité $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{u \exp\left(-u^2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{1-e^{-u^2}}} du$.

Exercice 277 [X MP 2023 # 372] • Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) dt$ pour tout réel x .

- On pose $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\forall x > 0, F''(x) = F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$
- Donner une expression simplifiée de F .

Exercice 278 [X MP 2023 # 373] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ de carré intégrable. On pose $S_f: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy$.

- Justifier la bonne définition de S_f .
- Montrer que S_f est de carré intégrable.

Démonstration. • CS

- On a, par Cauchy-Schwarz, en multipliant et divisant par du $y^{1/4}$,

$$S_f(x)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \frac{f(y)\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} \times \frac{1}{\sqrt{y(x+y)}} dy \right)^2 \leq \int \frac{f^2 y}{x+y} dy \int \frac{1}{y(x+y)} dy,$$

$$S_f(x)^2 \leq \int \frac{1}{x+y} \frac{dy}{\sqrt{y}} \int \frac{f(y)^2 \sqrt{y}}{x+y} dy.$$

Le premier facteur est en $x^{-1/2}$, puis $x^{-1/2} \int \frac{f(y)^2 \sqrt{y}}{x+y} dy = x^{-1/2}$, si on admet Fubini (positif), $\int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x(x+y)}} dx = \pi$, d'où l'intégrabilité en x de ce qui précède.

- R L'opérateur est connu sous le nom de «Hilbert-Hankel», ou «Carleman». C'est le carré de l'opérateur de Laplace $L_f: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xy} f(y) dy$. La démonstration de la bonne définition de L_f est la même □

Exercice 279 [X MP 2023 # 374] Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} e^{-xt^\alpha} dt$.

- Déterminer la limite et un équivalent de I en $+\infty$.
- Donner un développement asymptotique de I à tout ordre.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce développement soit la somme partielle d'une série convergente pour tout $x > 0$.

Démonstration. • Tend vers 0, faire un changement de variable pour l'équivalent : $t = \frac{u}{x^{1/\alpha}}$; On obtient $\frac{1}{x^{\beta/\alpha}} \int_0^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u/x^{1/\alpha}} e^{-u^\alpha} du$.
Quand à la valeur de l'intégrale, : $\int_0^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u^\alpha} du$, poser $x = u^\alpha$, puis IPPs successives.

- On peut développer $e^{-u/x}$ en série.
-

□

Exercice 280 [X MP 2023 # 375] • Soient K un segment et $f: K \rightarrow K$ une fonction continue croissante. Montrer que f admet un point fixe.

- On considère l'équation différentielle non linéaire $(E): x' = \cos(x) + \cos(t)$. On admet que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution φ_a de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(0) = a$, et que, pour tous a, b réels distincts, les fonctions φ_a et φ_b ne coïncident en aucun point. Montrer que (E) possède une solution 2π -périodique.

Démonstration. •

- Quand $x = 0$, la fonction est croissante, donc une solution ne peut pas passer sous 0. Quand $x = \pi$, la fonction est décroissante, donc la fonction ne peut pas passer au dessus de π . Il existe donc $a \in [0, \pi]$ tel que $\varphi_a(2\pi) = \varphi_a(0)$. □

Exercice 281 [X MP 2023 # 376] Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in [0, 1]$.

- Justifier qu'il existe une unique fonction $x_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, x'(t) = f(t) - (f(t) + g(t))x(t)$ et $x(0) = a$.
- On suppose que f et g ont une limite finie strictement positive en $+\infty$. Montrer que x_a tend vers 0 en $+\infty$.
- Montrer que f et g peuvent être choisies de telle sorte que x_a n'ait pas de limite en $+\infty$.
- On suppose que l'une des fonctions f et g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $x_1 - x_0$ tend vers 0 en $+\infty$.

Démonstration. 1. On peut exprimer la solution, via exp.

2. Utiliser l'expression.

3. Prendre $f + g$ constante, et f qui oscille.

4. Expression intégrale. □

Exercice 282 [X MP 2023 # 377] Soient $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact et $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = v(t)$ dont on note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions.

- Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $f_{a,b}^+$ (resp. $f_{a,b}^-$) de (E) telle que $f_{a,b}^+(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $+\infty$, (resp. $f_{a,b}^-(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $-\infty$).
- Montrer que $\mathcal{S}_E = \{f_{a,b}^+, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{f_{a,b}^-, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On pose $c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cos(\omega t) dt$ et $s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \sin(\omega t) dt$, et on définit l'application $S_\omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par : $f_{a,b}^- = f_{S_\omega(a,b)}^+$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Expliciter l'application S_ω en fonction de $c(\omega)$ et $s(\omega)$.
- On suppose que $S_\omega = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ pour tout $\omega > 0$. Montrer que v est identiquement nulle.

Démonstration. 1. Appliquer les conditions aux bords du compact.

2. Pas de difficulté.

3. Intégrer l'équation différentielle, une fois multipliée par $\cos(\omega t)$, faire deux IPP. Pour simplifier, se placer en un multiple de 2π , en dehors du support.

4. Ce serait le cas si $\forall \omega, c(\omega) = s(\omega) = 0$. On peut ou bien appliquer le théorème de Weierstrass trigonométrique, ou bien dériver successivement, et obtenir que $\int P(t)v(t) \cos(\omega t) dt = 0$, et en prenant P une approximation à ε près de v , on conclut. □

Exercice 283 [X MP 2023 # 378] Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considère l'équation différentielle $(E_i): y'' + q_i(t)y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

- Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I . Soient $\alpha < \beta$ deux zéros de y_1 . Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, m, M deux réels strictement positifs tels que $m \leq q \leq M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs d'une solution non nulle x de $y'' + q(t)y = 0$.
- Montrer que les zéros de x forment une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 284 [X MP 2023 # 379] • Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $pu + up = u$. Montrer que $\text{tr}(u) = 0$.

- Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note G l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E de rang r . Soit $p \in G$. Déterminer l'espace vectoriel tangent à G en p .

Démonstration. • $pup = 0$

- u symétrique + $pu + up = u$ (puisque c'est le noyau de l'application linéaire).

En conjuguant par une matrice orthogonale, on se ramène à $u = J_r$.

On considère $\mathcal{G} = \{S \in \mathcal{S}_n \mid J_r S + S J_r = S\}$. Matriciellement, $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} O & U \\ U^T & O \end{pmatrix} \right\}$.

On a l'inclusion de l'espace tangent dans $\mathcal{G}$.

Réciproquement, J_r est la projection sur $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$.

Étant donné des coefficients u_{ij} , et $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $F_t = \text{Vect}(e_1 + \sum_{j \geq r+1} u_{1j} e_j, \dots, e_r + \sum_{j \geq r+1} u_{rj} e_j)$, et P_t la projection orthogonale sur F_t .

En utilisant l'expression de la matrice de P_t via des produits scalaires, on obtient peut-être quelque chose. $\square$

Exercice 285 [X MP 2023 # 380] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère le carré de coins $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. On choisit trois points A, B et C sur ce carré. SUP

- Montrer qu'il existe une disposition des points A, B et C maximisant l'aire du triangle ABC .
- Caractériser une telle disposition.

Démonstration. •

- Si A n'est pas dans un coin, il faut nécessairement que le côté BC soit parallèle au côté sur lequel A est. $\square$

3) Géométrie

Exercice 286 [X MP 2023 # 381] Pour $n \geq 2$, on note P_n le périmètre d'un polygone régulier à 2^n cotés inscrit dans le cercle unité.

- Calculer P_n et étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n \geq 2}$.
- Établir une relation de récurrence entre P_n et P_{n+1} .
- Estimer l'erreur $2\pi - P_n$.
- Proposer une méthode d'approximation de π par excès.

Démonstration. 1. On a une expression avec des $|e^{i(k+1)\theta} - e^{ik\theta}|$.

2. Angle double.

3. Probablement assez simple.

4. Tu prends un polygone circonscrit : en choisissant les points de tangente, puis Pythagore donne la longueur. $\square$

Exercice 287 [X MP 2023 # 382] On se donne un triangle direct ABC du plan complexe. On note respectivement a, b, c les mesures principales des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note P l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB})$; Q l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AC})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ})$; R l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ et $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BA})$. L'objectif est de montrer que le triangle PQR est équilatéral.

- On note f, g, h les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angles de mesures respectives $\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}$ et $\frac{2c}{3}$. Montrer que P est l'unique point fixe de $g \circ h$.
- Montrer que $(f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = z$ pour tout nombre complexe z .
- On note $f : z \mapsto a_1 z + b_1, g : z \mapsto a_2 z + b_2$ et $h : z \mapsto a_3 z + b_3$. Exprimer P, Q, R en fonction des a_i et des b_i .
- Conclure.

4) Probabilités

Exercice 288 [X MP 2023 # 383] Déterminer le nombre moyen de 2-cycles, de 3-cycles, de p -cycles, d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 289 [X MP 2023 # 384] • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partition de n toute liste décroissante $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'entiers naturels non nuls de somme n . On note $P(n)$ le nombre de telles listes. Montrer que $P(n) \leq 2^{n-1}$.

- On fixe $n \geq 1$ et on considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'ensemble des partitions de n . On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. On pose $N_k = |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : X_i = k\}|$.

Exprimer $\mathbf{P}(N_k \geq j)$ comme un quotient $\frac{P(a)}{P(b)}$ pour des entiers a et b à préciser.

- Calculer $\sum_{i=1}^n i N_i$.

Démonstration. • Par récurrence, bof.

- L'évènement $(N_k \geq j)$ correspond à «il y a au moins j occurrences de k », cela correspond à $\frac{P(n-kj)}{P(n)}$.

- C'est n . $\square$

Exercice 290 [X MP 2023 # 384] Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}$.

Démonstration. Revient à $(\ln u)^2 u < (1-u)^2$, pour $u \in]0, 1[$. En posant $u = 1-h$ et en développant en série, par CSSA, c'est bon. $\square$

Exercice 291 [X MP 2023 # 385] On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

- Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

- On lance une pièce non truquée. Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui donne l'instant de première apparition du motif Face-Face.
- Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.

Démonstration.

- Pas dur.
-
-

□

Exercice 292 [X MP 2023 # 386] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme, et on note N la variable aléatoire associant à tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le nombre de ses orbites.

- Calculer $\mathbf{P}(N = 1)$ et $\mathbf{P}(N = n)$.
- Donner une formule simple pour la fonction génératrice de N .
- Donner un équivalent de $\mathbf{E}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{V}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- En notant $\omega(\sigma)$ son nombre d'orbites, on cherche $G(X) = \sum_{\sigma} X^{\omega(\sigma)}$. On trouve $X(X+1) \dots (X+n-1)$. On peut le montrer par récurrence, via $c_n(k) = c_{n-1}(k-1) + (n-1)c_{n-1}(k)$.
- Utiliser G .
- Idem.

□

Exercice 293 [X MP 2023 # 387] Soient $n \geq 2$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $f_{(X_1, \dots, X_n)}$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ telle que, pour tout i , $f_{(X_1, \dots, X_n)}(e_i) = e_{X_i}$.

- Déterminer $\mathbf{E}(\text{rg}(f_{(X_1, \dots, X_n)}))$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, soit μ_z la multiplicité de z comme valeur propre de $f_{(X_1, \dots, X_n)}$. Calculer $\mathbf{E}(\mu_z)$.

Démonstration.

- Le rang est le cardinal de $\{X_1, \dots, X_n\}$.
- Si λ est valeur propre, non nul, en écrivant $X = \sum x_i e_i$, les e_i sont dans l'image, donc on est une permutation sur les e_i de l'image.
Les valeurs propres d'une permutation sont les racines de l'unité des longueurs des cycles. Si μ_z est une racine primitive k -ième de l'unité, elle intervient pour chaque cycle de longueur $k, 2k, 3k$, etc.
On connaît l'espérance du nombre de cycles de longueur k , etc.

□

Exercice 294 [X MP 2023 # 388] Soient $b, n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0, b-1 \rrbracket$. On note S l'ensemble des descentes de la suite B c'est-à-dire $S = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid B_i > B_{i+1}\}$.

- Pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, calculer $\mathbf{P}(B_i > B_{i+1})$.
- Soit $j \in \llbracket 1, n-j-1 \rrbracket$. Calculer $\mathbf{P}(B_1 > B_2 > \dots > B_{j+1})$.
- Pour $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\alpha(I)$ (resp. $\beta(I)$) le nombre de suites à n éléments à valeurs dans $\llbracket 0, b-1 \rrbracket$ qui vérifient $S \subset I$ (resp. $S = I$). Exprimer α en fonction de β , puis β en fonction de α .

Démonstration.

-
-

□

Exercice 295 [X MP 2023 # 389] Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ et $k \in \{1, \dots, 2n\}$, on note $s(\sigma, k)$ le segment de $\mathbb{C}$ qui joint les points $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et $e^{\frac{i\sigma(k)\pi}{n}}$. On note $b(\sigma)$ le nombre de segments qui ne croisent aucun autre segment (ou on dit que deux segments se croisent s'ils ont un point d'intersection qui n'est pas une extrémité).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_{2n}$. Déterminer $\mathbf{E}(b(\sigma_n))$ et en donner un équivalent.

Démonstration. Il suffit de compter le nombre de croisements avec le segment $k = 0 (= 2n)$.

Pour $k \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket$, $s(\sigma, 0)$ et $s(\sigma, k)$ se croisent avec probabilité $\frac{1}{2n} \left(\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\ell-1}{2n} + \sum_{\ell=k+1}^{2n-1} \frac{2n-\ell-1}{2n} \right)$.

□

Exercice 296 [X 2023 # 390] Soient $p \in [0, 1/2]$, $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$. On cherche p tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}(\sum_{i=1}^n a_i X_i = 0) \geq \mathbf{P}(\sum_{i=1}^n a_i X_i = b)$.

1. Montrer que $p \leq \frac{1}{3}$, puis que $p < \frac{1}{3}$ et enfin que $p \leq \frac{1}{4}$.
2. Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}(e^{iX\theta})$. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de Φ_X .
3. En déduire que $p \leq \frac{1}{4}$ est une condition suffisante.

Démonstration. 1. On regarde les probabilités, jusqu'à $n = 3$.

2. $\Phi_X(\theta) = \sum P(X = k)e^{ikt}$ et formule de Cauchy, c'est-à-dire $P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(\theta)e^{-ik\theta} d\theta$

3. Par ailleurs $\varphi_X(\theta) = (1 - 2p + 2p \cos \theta)^n$, donc si $p \leq \frac{1}{4}$, on est toujours positif. $\square$

Exercice 297 [X MP 2023 # 391] Soient n et d des entiers tels que $1 \leq d < n$, et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\llbracket 0, d \rrbracket$. On note S_n la classe de $X_1 + \dots + X_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- La variable aléatoire S_n est-elle uniformément distribuée sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Calculer la loi de S_n .

Démonstration. • Non, cf $d = 1$, c'est une loi binomiale.

- Fonction génératrice. $\square$

Exercice 298 [X MP 2023 # 392] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, d \rrbracket$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- Soient Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $\omega = e^{2i\pi/n}$.
Montrer que $\mathbf{P}(Y \equiv r[d]) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^{kr}} \mathbf{E}(\omega^{kY})$.
- Soit $\llbracket 0, d-1 \rrbracket$. Donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r[d])$.
- Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathbf{P}(S_n \equiv 0[d])$.

Exercice 299 [X MP 2023 # 393] Soit $n \geq 1$.

- On se donne deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant chacune la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket^2$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Déterminer la probabilité $u_n(r)$ pour que X_n et Y_n soient deux points distincts et le coefficient directeur de la droite $(X_n Y_n)$ soit égal à r . Donner un équivalent de $u_n(r)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- On se donne quatre variables aléatoires indépendantes X_n, Y_n, A_n, B_n suivant chacune la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket^2$. On note p_n la probabilité pour que $X_n \neq Y_n$, $A_n \neq B_n$ et les droites $(X_n Y_n)$ et $(A_n B_n)$ soient parallèles. Montrer que $p_n = O(\frac{\ln n}{n^2})$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. • C'est la probabilité que $\frac{a_n - b_n}{c_n - d_n} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire $p(c_n - d_n) = q(a_n - b_n)$.

Il faut que $a_n - b_n$ soit un multiple non nul de p ,

$\sum_{k \neq 0} P(a_n - b_n = kp) P(c_n - d_n = kq) = \sum_{k \neq 0} \sum_{i,j=1}^n \frac{1_{i=kp+j}}{n^2} \sum_{u,v} \frac{1_{u=kq+v}}{n^2}$ On peut supposer $k > 0$, quitte à multiplier par 2. Pour $k = 1$ le produit vaut $\frac{(n-1-p)(n-1-q)}{n^4}$.

On a donc $\sum_{k \geq 1} \frac{(n-1-kp)(n-1-kq)}{n^4}$, qu'on peut identifier à $\sum_{k \geq 1} \frac{(n-kp)(n-kq)}{n^4}$.

C'est $\frac{1}{n^2} \sum_{k \geq 1} (1 - \frac{kp}{n})(1 - \frac{kq}{n})$, qui est une somme de Riemann, pour la fonction $f: x \mapsto (1 - px)(1 - qx)$, nulle dès que $\max(qx, px) \geq 1$.

On trouve $\frac{\max(p,q) + |p-q|}{6 \max(p,q)^2}$, peut-être. Mais le $\Theta(\frac{1}{\max(p,q)})$ est clair.

En particulier, c'est en $O(\frac{1}{n})$

- On somme sur les r . On a $\sum_r \frac{1}{(nh(r))^2} = \sum_{k=h(r)} \frac{k}{n^2 k^2}$, d'où le résultat. $\square$

Exercice 300 [X MP 2023 # 394] Soit $a \in [1, 2]$.

- On pose $f_a: x \mapsto |1 + x|^a - |2x|^a - ax$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) \leq 1$.
- Soit X une VAR centrée et admettant un moment d'ordre 2. Montrer : $\forall c \in \mathbb{R}, \mathbf{E}(|c + X|^a) \leq 2^a \mathbf{E}(|X|^a) + |c|^a$.
- Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de VAR centrées admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(|\sum_{i=1}^n X_i|^a) \leq 2^a \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(|X_i|^a)$.

Démonstration. • Sur $\mathbb{R}_+$, la dérivée est $a((1+x)^{a-1} - 2x^{a-1} - 1)$, qui est négative, car $a \in [1, 2]$, donc $a-1 \in [0, 1]$ (marche avec 1 au lieu de 2).

Sur $[-1, 0]$, la dérivée est $a((1+x)^{a-1} + 2|x|^{a-1} - 1)$, qui est positive, car $(1+x)^{a-1} \geq 1 + (a-1)x$, et $(a-1)x + 2|x|^{a-1} \geq 0$, car la partie négative est ax plus petite que $2|x|$ (marche avec 1 au lieu de 2).

Sur $]-\infty, -1]$, en posant $x = -1 - y$ ($y \geq 0$) on a $y^a - 2(1+y)^a + a + ay$. On écrit $(1+y)^a \geq 1 + y^a$, ça donne $a - 1 + ay - (1+y)^a \leq a - 2 \leq 0$.

- Écrire $E(|c + X|^a) = |c|^a \left(E(|1 + \frac{X}{c}|^a) \leq |c|^a E(|2\frac{X}{c}|^a - a\frac{X}{c}) + 1 \right)$

- La récurrence ne passe pas, l'ami, mais conditionner par rapport aux valeurs de la somme $Y = \sum_{i=2}^n X_i$. $\square$

Exercice 301 Soit $a \in [1, 2]$. On pose $f_a: x \mapsto |1 + x|^a - |2x|^a - ax$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) \leq 1$.

Démonstration. Sur $\mathbb{R}_+$, la dérivée est $a((1+x)^{a-1} - 2x^{a-1} - 1)$, qui est négative, car $a \in [1, 2]$, donc $a-1 \in [0, 1]$ (marche avec 1 au lieu de 2).

Sur $[-1, 0]$, la dérivée est $a((1+x)^{a-1} + 2|x|^{a-1} - 1)$, qui est positive, car $(1+x)^{a-1} \geq 1 + (a-1)x$, et $(a-1)x + 2|x|^{a-1} \geq 0$, car la partie négative est ax plus petite que $2|x|$ (marche avec 1 au lieu de 2).

Sur $]-\infty, -1]$, en posant $x = -1 - y$ ($y \geq 0$) on a $y^a - 2(1+y)^a + a + ay$. $\square$

Exercice 302 URNE DE POLYA [X MP 2023 # 395] Une urne contient a boules jaunes et b boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule dans l'urne avec remise. À chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur de celle tirée dans l'urne. On note X_n le nombre de boules jaunes dans l'urne après n tirages et T_n l'évènement «tirer une boule jaune au n -ième tirage».

1. Calculer $P(T_1 | T_2)$.
2. Déterminer la loi de X_n .
3. Calculer $P(T_n)$.
4. Pour $n_1, \dots, n_p, m_1, \dots, m_q$ tous distincts, calculer $P(T_{n_1} \cap \dots \cap T_{n_p} \cap \overline{T_{m_1}} \cap \dots \cap \overline{T_{m_q}})$.

Démonstration. 1.

$$P(X_n = a) = \frac{b}{a+b} \frac{b+1}{a+b+1} \cdots \frac{b+n-1}{a+b+(n-1)}$$

$$P(X_n = a+1) = n \frac{b}{a+b} \frac{b+1}{a+b+1} \cdots \frac{b+n-2}{a+b+(n-2)} \frac{a}{a+b+(n-1)}.$$

En général, $P(X_n = a+k) = \binom{n}{k} \frac{(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!} \frac{(b+n-k-1)!}{(b-1)!} \frac{a+k-1!}{(a-1)!}.$

3. dur dur, $E(X_n)$
- 4.

□

Exercice 303 [X 2023 # 396] Soient $n \geq 1$ et A, B, C des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{0, 1\}^n$.

1. Pour $n \geq 2$, calculer la probabilité p_n que ABC soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer un équivalent de p_n .

Démonstration. 1. On prend $A = \vec{0}$. Alors on veut B, C avec autant de termes 1, et autant de différences entre les deux.

On considère les ensembles $B \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, $C \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, et $B \oplus C$.

Les parties $U = B \setminus C$, $V = C \setminus B$ et $W = B \cap C$ vérifient $u + w = v + w = u + v$, donc ils sont de même cardinaux, et disjoints, et cela revient à les choisir.

On obtient $\sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} \binom{n-2k}{k}$.

2. Par exemple, dans le cas plus simple $\sum_k \binom{n}{k}$, on sait que le poids est aux environs de $k = \frac{n}{2}$, avec de l'ordre de $\sqrt{n}$ autour.

Pour $\sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} = \sum_k \frac{n!}{k!k!(n-2k)!}$, le terme est maximal lorsque $k^2 = (n-2k)(n-2k-1)$, c'est-à-dire $k \simeq \frac{n}{3}$.

La RMS remarque que p_n , à un facteur près, est égal à l'intégrale double

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{i\theta} + e^{i\theta'} + e^{-i(\theta+\theta')})^n d\theta d\theta'.$$

Puis on écrit la fonction intégrée comme $1 - \frac{1}{4}(\theta^2 + \theta'^2 + \theta\theta') + o(\theta^2 + \theta'^2)$. On change de variable en $\sqrt{n}$, on fait de la convergence dominée, on diagonalise la forme quadratique (dans une BON). □

Exercice 304 [X MP 2023 # 397] On munit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de la probabilité uniforme. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

- Calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.
- Déterminer la loi de X_n .
- Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Calculer les espérance et variance de la variable aléatoire X_n .

Exercice 305 [X MP 2023 # 398] Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ une matrice aléatoire où $(a+1) \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $(b+1) \sim \mathcal{P}(\beta)$,

$(c+1) \sim \mathcal{P}(\gamma)$ et $(d+1) \sim \mathcal{P}(\delta)$.

- Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible.
- Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible et diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. • $M = aI_n + A$. La matrice A est antisymétrique. Les valeurs propres possibles de A sont 0 les autres valeurs propres sont imaginaire pures (car leur carré est valeur propre négative de AA^T).

Si $a \neq 0$, on est inversible.

En fait, on a $MM^T = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_n$ (quaternion).

- On ne peut pas être diagonalisable, sauf si on est scalaire, puisque si on était diagonalisable, les valeurs propres seraient $\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

On peut retirer a (supposer $a = 0$), et alors $M^2 = -(b^2 + c^2 + d^2)I_n$. □

Exercice 306 [X MP 2023 # 399] Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(X \geq Y) = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et $\mathbf{P}(Y = i | X = n) = \frac{1}{n+1}$.

- Montrer que, si $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i, X - Y = j)$, puis que $X - Y \sim Y$.
- Montrer que $\mathbf{P}(Y = 0) > 0$.
- On suppose que $X - Y$ et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de Y , puis celle de X .

Exercice 307 [X MP 2023 # 400] Soit $n \geq 3$ un entier. Si $k \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{k}$ la réduction de k modulo n . Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k suit la loi uniforme sur $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Soit F l'application aléatoire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F(\bar{k}) = \bar{k} + X_k$. Calculer la probabilité que F soit bijective.

Démonstration. Quand X_k vaut 2, le prochain ne doit pas valoir 1, et quand X_k vaut 3 le prochain ne doit pas valoir 2, et celui d'après ne doit pas valoir 1.

On interdit les pattern 21, 32, et 3^*1 .

Plutôt, pour un interstice entre i et $i+1$, on regarde le nombre de truc qui lui saute au dessus. S'il y en a 3, alors cela implique de même pour le prochain interstice. S'il y en a 1 seul, de même.

S'il y en a 2, alors ou bien les sauts se croisent, ou il ne se croisent pas, et il peut en être de même pour les interstices d'à côté. Je dirais donc qu'il y a 2^n possibilités, plus 2.

Vérifions : pour $n = 2$. Soit $+1, +1$, soit $+2, +2$, soit $+3, +3$, soit $+1, +3, +3, +1$. Bon ça ne marche pas.

Pour $n = 3$: $(1, 1, 1)$ (chaque interstice est sauté une fois). $(3, 3, 3)$ (chaque interstice est sauté trois fois). $(2, 2, 2)$ donne tous croisés, et il se trouve que si une interstice est parallèle, les deux autres doivent être croisées. Finalement, 6 possibilités.

En fait, autour d'une parallèle, on doit être croisé. Le nombre de cercle de n termes 0, 1 sans paires de 1 consécutifs est : $F_{n-1} + F_{n-3}$.

Pour $n = 4$, on prédit donc $1 + 1 + 5 + 2 = 9$, ce qui fonctionne. $\square$

Exercice 308 [X MP 2023 # 401] On cherche à collectionner N jouets. À chaque achat, chaque jouet a une probabilité uniforme d'être obtenu. Pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note T_i le temps d'attente pour obtenir i jouets différents.

- Calculer l'espérance de T_N .
- Calculer la variance de T_N .
- Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}\left(\left|\frac{T_N}{N \ln N} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$.

Exercice 309 [X MP 2023 # 402] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles centrées.

On suppose que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$.

- Montrer que $\mathbf{E}\left((X_1 + \dots + X_n)^4\right) = O(n^2)$.
- Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la nature de la série de terme général $\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} > \varepsilon\right)$?

Exercice 310 [X MP 2023 # 403] Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{P}(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geq x) dx = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.
- On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathbf{P}(T_n \geq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$. Retrouver la formule de Stirling.

Démonstration. • C'est $E(T_n)$.

- Vide.

$\square$